

OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2014

FINALE NAZIONALE

Prova Teorica - Categoria Senior



1. Cattivissimo me

Nel film "Cattivissimo me" il protagonista, Gru, progetta di rubare la Luna dopo averne ridotto il diametro a circa 10 cm. Sapendo che il raggio di Schwarzschild (cioè il raggio entro cui un corpo di massa M diventa un buco nero) è dato da: $R_s = 2GM/c^2$ (dove c è la velocità della luce e G la costante di gravitazione universale), con un diametro di 10 cm la Luna sarebbe un buco nero?



Soluzione

Utilizzando la relazione $R_s = 2GM/c^2$ troviamo che per la massa della Luna il raggio di Schwarzschild vale

$$R_s = 2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.348 \cdot 10^{22} / (3 \cdot 10^8)^2 = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0.01 \text{ cm}$$

La Luna sarebbe quindi ben lontana dall'essere un buco nero se il suo raggio fosse ridotto a 5 cm. Punto supplementare per la seguente considerazione. Poiché l'accelerazione di gravità vale $g = GM/r^2$, anche senza essere un buco nero con un raggio di 5 cm l'accelerazione di gravità della Luna sarebbe enorme e Gru finirebbe schiacciato contro di essa.



2. Osservando due stelle

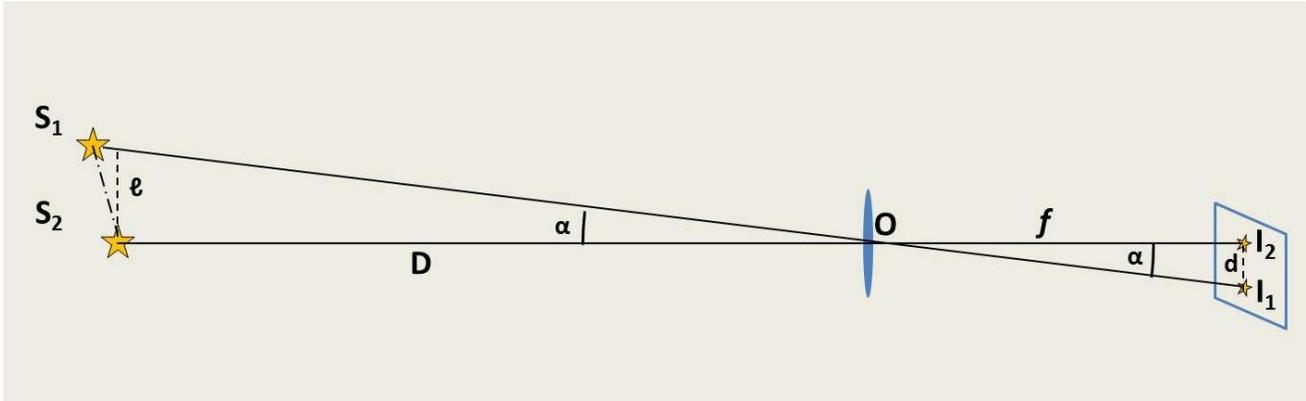
Una binaria visuale dista dal Sole 600 pc. Sapendo che le due componenti osservate dalla Terra distano tra di loro 36000 UA, calcolare la distanza lineare "d" delle loro immagini sul piano focale di una lente con $f = 5$ m.

Soluzione

La figura riporta la situazione geometrica del problema. Al centro c'è la lente (O – obiettivo) del telescopio.

La distanza angolare delle due stelle è data dalla relazione:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{36000}{600 \cdot 206265}\right) = 0.016^\circ = 1'$$



La distanza (d) sul piano focale della lente è data da:

$$d = f \cdot \operatorname{tg} \alpha = (5 \text{ m}) \cdot 2.9 \cdot 10^{-4} = 1.45 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,45 \text{ mm}$$

In alternativa, indicando con l la separazione lineare tra le due stelle, con D la distanza e con α la separazione angolare, si può scrivere:

$$l = D \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Poiché α è piccolo, si può sostituire $\operatorname{tg} \alpha$ con l'angolo espresso in radianti, per cui avremo:

$$l = D \cdot \alpha / 206265$$

La separazione angolare tra le due stelle sarà dunque:

$$\alpha = (206265 l) / (206265 d) = 36000/600 = 60''$$

E la distanza d sul piano focale:

$$d = f \operatorname{tg} \alpha \sim f \alpha / 206265 = 5 \times 60 / 206265 = 5 \times 2.91 \times 10^{-4} = 1.45 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.45 \text{ mm}$$

Terzo metodo (che non richiede la trigonometria):

Dalla similitudine dei due triangoli rettangoli OS_1S_2 e OI_1I_2 , si ha

$$l : D = d : f$$

da cui

$$d = f \cdot \frac{l}{D} .$$

3. Scombinacostellazioni

I moti propri delle stelle modificano su tempi scala lunghi la struttura delle costellazioni. Prendiamo ad esempio l'Orsa Maggiore:



STELLE	A.R. J2000	DEC J2000	moto in AR "/anno	moto in DEC "/anno
Dubhe	11 ^h 03 ^m 44 ^s	+61° 45' 04"	-0.14	-0.04
Merak	11 ^h 01 ^m 50 ^s	+56° 22' 56"	0.08	0.03
Phecda	11 ^h 53 ^m 50 ^s	+53° 41' 41"	0.11	0.01
Megrez	12 ^h 15 ^m 25 ^s	+57° 01' 57"	0.10	0.01
Alioth	12 ^h 54 ^m 02 ^s	+55° 57' 35"	0.11	-0.01
Mizar	13 ^h 23 ^m 55 ^s	+54° 55' 32"	0.12	-0.02
Alkaid	13 ^h 47 ^m 33 ^s	+49° 18' 48"	-0.12	-0.02

Calcolare il tempo necessario affinché le stelle Mizar e Alkaid raggiungano lo stesso meridiano. Ripetere il calcolo per le stelle Dubhe e Merak. Si approssimi la sfera celeste con un piano.

Soluzione

Indichiamo con S_1 la prima stella e con S_2 la seconda stella, con $(AR)'$ la posizione in ascensione retta di ciascuna stella dopo un intervallo di tempo Δt (partendo dalla posizione iniziale AR) e con μ il moto proprio in ascensione retta.

$$(AR)'_{S_1} = (AR)_{S_1} + \mu_{S_1} \cdot \Delta t$$

$$(AR)'_{S_2} = (AR)_{S_2} + \mu_{S_2} \cdot \Delta t$$

Le due stelle raggiungeranno lo stesso meridiano quando $(AR)'_{S_1} = (AR)'_{S_2}$, da cui

$$(AR)_{S_1} - (AR)_{S_2} = (\mu_{S_2} - \mu_{S_1}) \cdot \Delta t$$

quindi

$$\Delta t = [(AR)_{S_1} - (AR)_{S_2}] / (\mu_{S_2} - \mu_{S_1})$$

Per Alkaid e Mizar:

$$\Delta t = (-23^m 38^s) / (-0.24"/\text{anno}) = -21270" / (-0.24"/\text{anno}) = 88625 \text{ anni.}$$

Per Dubhe e Merak:

$$\Delta t = (1^m 54^s) / (0.22"/\text{anno}) = 1710" / (0.22"/\text{anno}) = 7773 \text{ anni.}$$

4. Alla deriva

Per un errore di manovra, l'astronave Enterprise di Star Trek si viene a trovare alla distanza di 200.000 a.l. dal centro della galassia di Andromeda. Per sfuggire all'attrazione gravitazionale della galassia, il comandante Kirk deve imprimere all'astronave una opportuna velocità minima.

Qual è questo valore? Si consideri che il comandante, pur ricordando che la massa M_g della galassia di Andromeda è pari a 1.023×10^{12} masse solari, non ha molto tempo a disposizione per effettuare calcoli dettagliati e quindi per semplicità ipotizza che la materia nella galassia abbia simmetria sferica.



Soluzione

Dati:

$$d = 2 \times 10^5 \text{ a.l.}$$

$$M_g = 1.023 \times 10^{12} M_s$$

Il capitano Kirk deve ovviamente imprimere all'astronave Enterprise una velocità pari alla velocità di fuga dal campo gravitazionale della galassia di Andromeda, calcolato prendendo l'intera massa della galassia (per l'ipotesi semplificativa di simmetria sferica) e alla distanza dell'astronave dal centro della galassia stessa. L'espressione della velocità di fuga è data da

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Trasformiamo quindi la distanza d in metri e la massa M_g in chilogrammi:

$$d = 200000 \times 9.46 \times 10^{15} \text{ m} = 1.892 \times 10^{21} \text{ m}$$

$$M_g = 1.023 \times 10^{12} \times 1.99 \times 10^{30} = 2.03 \times 10^{42} \text{ kg}$$

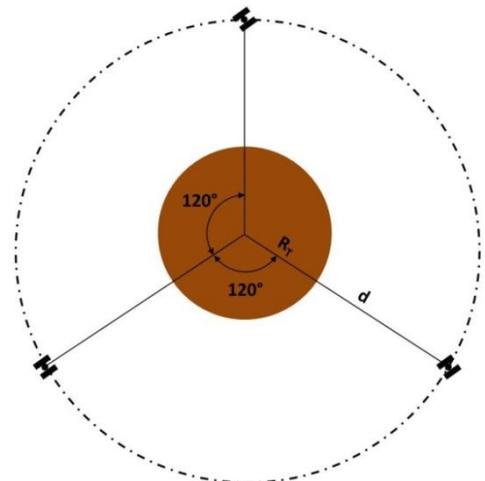
Sostituendo i valori, si ottiene:

$$v_f = 3.78 \times 10^5 \text{ m/s} = 378 \text{ km/s}$$

5. Una mini-costellazione di satelliti

Tre satelliti per telecomunicazioni sono in orbita equatoriale intorno alla Terra, nello stesso verso della rotazione terrestre, posti alla stessa distanza dal centro della Terra e separati reciprocamente di un angolo di 120° .

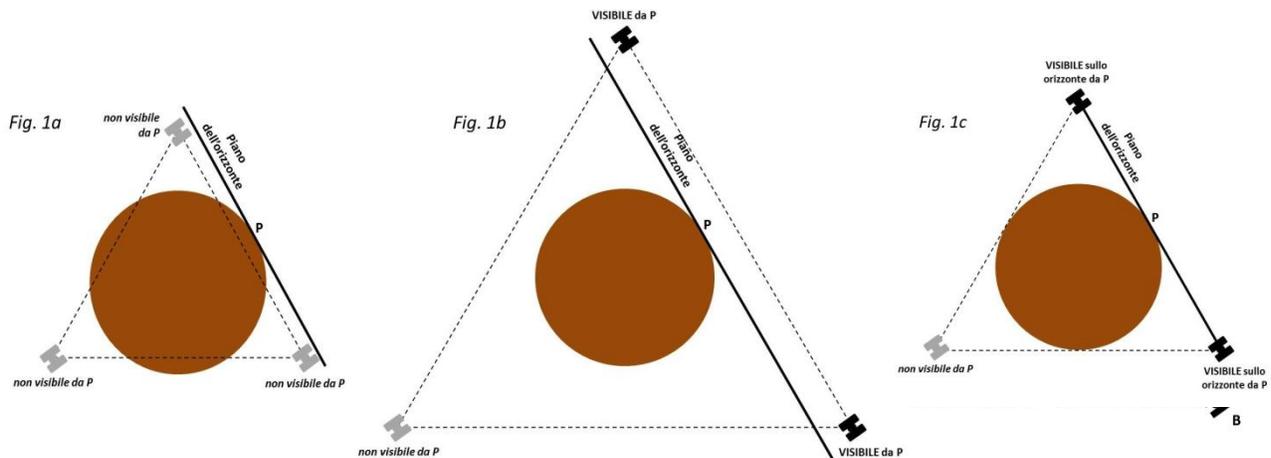
- 1) Calcolare la minima distanza D dalla superficie terrestre alla quale si devono trovare i tre satelliti, affinché da tutti i punti



dell'equatore sia sempre visibile almeno un satellite, al di sopra dell'orizzonte o sull'orizzonte stesso.

- 2) Per il valore della distanza così determinato, calcolare inoltre:
 - 2a) il periodo di rivoluzione siderale T_{SID} dei tre satelliti intorno alla Terra;
 - 2b) la minima e la massima latitudine, ϕ_{MIN} e ϕ_{MAX} , alle quali è possibile, almeno in alcuni istanti di tempo, veder passare uno dei satelliti della costellazione al di sopra dell'orizzonte o sull'orizzonte stesso.
- 3) Fissato un punto alla latitudine massima, dire quante volte in totale, in un giorno solare, si vedono passare (sull'orizzonte...) i satelliti della costellazione, supponendo che il primo passaggio avvenga a mezzanotte in punto.

Soluzione



Chiamiamo A, B, C i tre satelliti. Per la geometria del problema, in ogni istante essi si trovano sui vertici di un triangolo equilatero il cui centro coincide con il centro della Terra.

Facendo riferimento alla figura 1 che, come la figura del problema, rappresenta la Terra evidentemente vista da uno dei due poli celesti (ovvero con l'asse terrestre perpendicolare al foglio), il piano dell'orizzonte per un osservatore in un punto P dell'equatore terrestre sarà rappresentato dalla tangente all'equatore stesso passante per P . Pertanto, l'osservatore in P non riuscirebbe a vedere nessuno dei tre satelliti se essi fossero tutti dalla stessa parte (quella che contiene anche la Terra stessa) rispetto al piano suddetto. Ci si rende conto che questa situazione implica che i lati del triangolo ABC intersecano l'equatore terrestre (figura 1a). In conclusione, per far sì che da qualsiasi punto dell'equatore sia sempre visibile almeno un satellite, è necessario e sufficiente che i lati del triangolo ABC non intersechino l'equatore (figura 1b). Poiché la domanda n. 1 chiede che almeno un satellite sia visibile non necessariamente al di sopra dell'orizzonte, ma anche sull'orizzonte, ne ricaviamo che la situazione limite è quella in cui i lati del triangolo ABC sono tangenti all'equatore terrestre, ovvero l'equatore è un cerchio inscritto nel triangolo ABC (figura 1c). In questa condizione limite abbiamo evidentemente il valore minimo della distanza, come richiesto dalla domanda n. 1. Possiamo quindi procedere con le risposte.

1) Chiamiamo O il centro della circonferenza equatoriale e consideriamo ad esempio il satellite B . Poiché il triangolo ABC è equilatero, il segmento OB divide esattamente a metà l'angolo \widehat{ABC} (il cui valore è 60°). Possiamo quindi riassumere i dati del triangolo rettangolo BOP (il segmento OP è perpendicolare a PB per definizione):

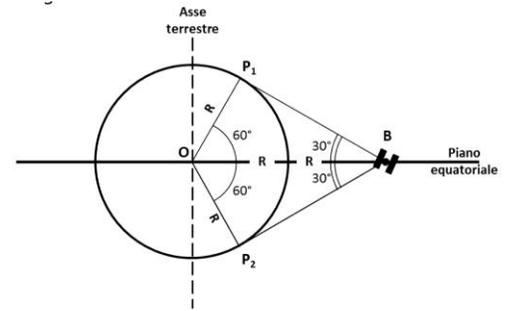
$$\widehat{BOP} = 60^\circ \quad \widehat{OBP} = 30^\circ \quad \overline{OB} = R + d \quad \overline{OP} = R$$

I valori degli angoli ci dicono in particolare che il triangolo BOP corrisponde alla metà di un triangolo equilatero. Il lato \overline{OP} ha dunque una lunghezza pari alla metà della lunghezza del lato \overline{OB} , ovvero:

$$R + d = 2R$$

da cui, in definitiva, si ricava la distanza minima dei satelliti dalla superficie terrestre:

$$d = R = 6378 \text{ km.}$$



2a) Per determinare il periodo di rivoluzione siderale T_{SID} dei tre satelliti, facciamo uso della III Legge di Keplero, conoscendo il valore della massa terrestre ($M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$), quello della costante di gravitazione universale ($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$) e ricordando che il semiasse maggiore a dell'orbita dei satelliti è pari ad $a = R + d = 2R$:

$$\frac{(R+d)^3}{T_{SID}^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

da cui

$$T_{SID} = 2\pi \sqrt{\frac{8R^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{8 \cdot (6.378)^3 \cdot 10^{18} \text{ m}^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}}} = 1.435 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Espresso in ore, il periodo di rivoluzione siderale dei satelliti è dunque pari a $T_{SID} = T = 3.98 \text{ ore}$.

2b) Per determinare quali sono le latitudini massime e minime da cui si possono vedere i satelliti della costellazione, basta costruire una figura, del tutto analoga a quella del problema, in cui la Terra sia vista non da uno dei poli celesti, ma dal piano equatoriale. La figura 3 mostra tale situazione in cui P_1 è un osservatore posto alla latitudine massima e P_2 è un osservatore posto alla latitudine minima. Una costruzione geometrica del tutto identica a quanto fatto in precedenza ci porta a concludere che gli angoli \widehat{BOP}_1 e \widehat{BOP}_2 hanno entrambi ampiezza di 60° . Dunque i satelliti sono visibili in un intervallo di latitudini compreso tra $\phi_{MIN} = -60^\circ$ e $\phi_{MAX} = +60^\circ$.

3) Per rispondere a questa domanda, concentriamoci prima di tutto su P_1 (la situazione per P_2 è infatti perfettamente simmetrica). Un osservatore posto in P_1 vedrà evidentemente un satellite alla volta lambire l'orizzonte per un istante e poi sparire di nuovo al di sotto dell'orizzonte. Ogni quanto tempo accade ciò? Sarebbe errato ritenere che ciò accada a intervalli $\Delta t_{SID} = T_{SID} / 3 = 1.327 \text{ ore}$. Infatti l'osservatore P_1 ruota insieme alla Terra, con periodo pari al giorno siderale,

$$T = 23^h 56^m 04^s.1 = 23.934 \text{ ore}$$

e ciò che egli vede veramente è il periodo apparente T_{APP} dei tre satelliti, ricavabile dalla relazione sinodica

$$\frac{1}{T_{APP}} = \frac{1}{T_{SID}} - \frac{1}{T} = \frac{1}{3.98} - \frac{1}{23.934} \cong 0.209 \text{ ore}^{-1}$$

da cui, in definitiva, si ricava

$$T_{APP} = 4.774 \text{ ore.}$$

L'osservatore in P_1 vede dunque passare un satellite a intervalli $\Delta t_{APP} = T_{APP} / 3 = 1.591$ ore. Nell'arco delle 24 ore esatte di un giorno solare, si verifica quindi un numero di passaggi pari a

$$n = 24 / 1.591 = 15.08 = 15 \text{ passaggi}$$

avendo arrotondato necessariamente per difetto poiché il numero di passaggi deve essere un numero intero. La domanda n. 3 fa però l'assunzione che il primo satellite passi a mezzanotte in punto. Se ne ricava che occorre aggiungere questo primo passaggio per ottenere il vero numero di passaggi, N_{VERO} :

$$N_{VERO} = n + 1 = 16 \text{ passaggi.}$$

L'osservatore vedrà complessivamente passare i satelliti della costellazione 16 volte nell'arco di un giorno solare.

Si può verificare, ripetendo i calcoli, che assumendo (erroneamente) il periodo di rivoluzione siderale invece che quello apparente, si sarebbe ottenuto il risultato di 19 passaggi anziché 16.

Alcuni commenti finali:

- a) il valore minimo della distanza d è stato ottenuto con considerazioni geometriche che assumono quindi la Terra perfettamente circolare e liscia. La presenza di montagne e valli, così come la non perfetta sfericità del nostro pianeta, fanno sì che il valore "vero" della distanza minima dipenda al luogo in cui è posto l'osservatore, da quanto cioè il suo orizzonte piatto sia ostacolato dalla presenza di rilievi. Il valore vero è pari al valore trovato, ad esempio, se l'osservatore si trova in mezzo all'oceano;
- b) trattandosi di una costellazione di satelliti per telecomunicazioni, c'è da aspettarsi che gli strati di atmosfera terrestre, che diventano particolarmente importanti man mano che si scende verso l'orizzonte, di fatto rendano non utilizzabile un satellite se questi si trova al di sotto di una altezza limite (in genere di pochi gradi). Il valore "vero" della distanza minima d , pertanto, sarà comunque maggiore di quello trovato per fare in modo da ogni luogo dell'equatore ci sia sempre un satellite posto ad alcuni gradi di altezza sull'orizzonte;
- c) infine, è chiaro che, nelle condizioni trovate, la visibilità di almeno un satellite è garantita per tutto il tempo **solo** all'equatore. Man mano che si sale o scende in latitudine, la visibilità sarà garantita per brevi intervalli di tempo, finché alla latitudine massima ($+60^\circ$) o minima (-60°) i satelliti appaiono solo per un istante, ogni 1.591 ore = 1 ora, 35 minuti e 28 secondi circa, sull'orizzonte. A latitudini superiori, addirittura è impossibile vedere i satelliti e quindi usarli per le telecomunicazioni. La conclusione è che una costellazione di satelliti che consenta di vederne sempre almeno uno da qualsiasi punto della Terra, deve essere costituita da un numero molto maggiore di satelliti. Tale numero dipende dalla distanza a cui orbitano i satelliti, la quale a sua volta è condizionata dall'energia necessaria per trasmettere segnali di adeguata potenza. I numeri diventano ancora più elevati nel caso del sistema di posizionamento GPS (ormai implementato anche nei comuni SmartPhone), in cui il buon funzionamento del sistema richiede che, dal punto in cui si trova il dispositivo, siano visibili almeno tre satelliti.