

# OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2012

## FINALE NAZIONALE

### Prova Teorica - Categoria Senior



**1. L'atmosfera terrestre.** Assumendo che al di sopra dei 30 km di altezza l'aria divenga talmente rarefatta da non essere più influente nel calcolo, si determini il volume dell'atmosfera terrestre. Se la Terra avesse un diametro di 7 cm, quale sarebbe corrispondentemente lo spessore dell'atmosfera?

**Soluzione.** Il volume di interesse è quello compreso fra il livello del mare e la quota  $d=30$  km, ovvero quello compreso tra due sfere concentriche, la più interna delle quali ha un raggio pari al raggio terrestre,  $R_i = R_T = 6372.8$  km, mentre la più esterna ha raggio pari a  $R_e = R_T + d = 6372.8 + 30 = 6402.8$  km. Il volume richiesto è pari alla differenza dei volumi delle due sfere:

$$V = V_e - V_i = \frac{4}{3}\pi(R_T + d)^3 - \frac{4}{3}\pi R_T^3 = 15.38 \cdot 10^9 \text{ km}^3$$

Tra il livello del mare e la quota di 30 km, è compreso un volume di oltre 15 miliardi di chilometri cubi di aria. Per rispondere alla seconda domanda, basta impostare la proporzione:

$$2R_T : 7 \text{ cm} = 30 \text{ km} : x$$

Essendo  $R_T = 6372.8$  km il raggio della Terra e  $x$  lo spessore che si desidera conoscere. Si ottiene:

$$x = (7 \text{ cm} \cdot 30 \text{ km}) / 2R_T = (7 \text{ cm} \cdot 30 \text{ km}) / 12745.6 \text{ km} = 0.0165 \text{ cm} = 0.165 \text{ mm}$$

Se la Terra fosse grande come una palla da biliardo del diametro di 7 cm, la sua atmosfera sarebbe spessa poco più di un decimo di millimetro. Una pellicola sottilissima, ma così importante per la vita sulla Terra!

## 2. Missione su Marte

Nel corso di una missione su Marte di un Rover automatico, i tecnici del centro di controllo a Terra, guardando le immagini provenienti dal Pianeta Rosso, si accorgono che il Rover si sta dirigendo verso un precipizio. L'ultima immagine inviata mostra che il precipizio si trova a 135 m dal Rover, il quale si muove sul terreno ad una velocità  $v = 23 \text{ cm/s}$ . Sapendo che Marte si trova in quadratura (ovvero a un'elongazione di  $90^\circ$ ) e assumendo le orbite di Terra e Marte circolari, perché i tecnici del centro di controllo si rendono conto di non poter salvare il Rover? Esistono delle posizioni di Marte che avrebbero permesso ai tecnici di salvare il Rover ?



**Soluzione.** Se Marte è in quadratura (figura 1) e assumendo le orbite circolari, con raggi quindi  $R_T = 1 \text{ UA}$  ed  $R_M = 1.5237 \text{ UA}$ , la distanza Terra-Marte  $d_{TM}$  si può ricavare con il teorema di Pitagora e vale:

$$d_{TM} = (R_M^2 - R_T^2)^{1/2} = 172 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Il tempo impiegato da un segnale luminoso a percorrere questa distanza è pari a

$$t = d_{TM} / c = 172 \cdot 10^6 \text{ km} / 300000 \text{ km/s} = 573.3 \text{ s}$$

In tale tempo il Rover su Marte percorre una distanza  $x$  pari a

$$x = v \cdot t = 23 \text{ cm/s} \cdot 573.3 \text{ s} = 13185.9 \text{ cm} = 131.9 \text{ m}$$

Se dunque i tecnici inviassero un messaggio di "stop ai motori", esso apparentemente arriverebbe prima che il Rover abbia percorso i 135 m che lo separano dal precipizio, ma in realtà non è così! Infatti, l'ultima immagine analizzata dai tecnici è stata trasmessa 573.3 secondi prima. Pertanto, dall'istante in cui il Rover trasmette l'ultima immagine all'istante ipotetico in cui un segnale di "stop ai motori" arrivasse, esso avrebbe in realtà percorso uno spazio:

$$2x = v \cdot 2t = 263.8 \text{ m}$$

La distanza Terra-Marte con Marte in quadratura è quindi troppo grande per permettere di salvare il Rover (e i tecnici saranno probabilmente licenziati!). La minima distanza Terra-Marte si ha quando Marte è all'Opposizione (figura 2). Assumendo le orbite circolari, con raggi quindi  $R_T = 1 \text{ UA}$  ed  $R_M = 1.5237 \text{ UA}$ , la distanza  $d_{TM}$  all'opposizione è semplicemente la differenza di queste due quantità:

$$\begin{aligned} d_{TM} &= R_M - R_T = 0.5237 \text{ UA} = 0.5237 \cdot 1.496 \cdot 10^8 \text{ km} \\ &= 78.35 \cdot 10^6 \text{ km} \end{aligned}$$

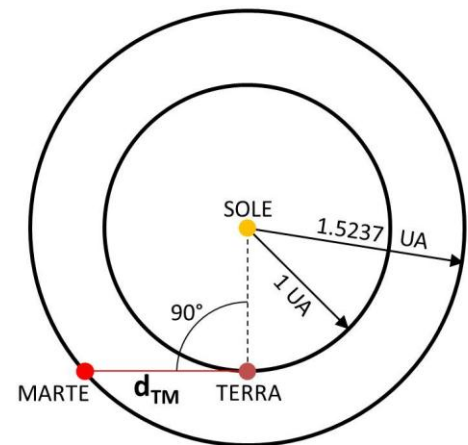


Figura 1

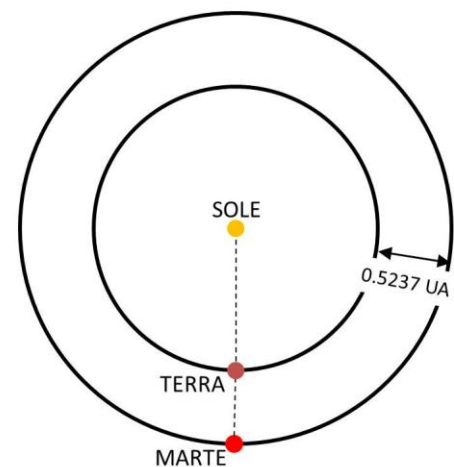


Figura 2

*Il tempo impiegato da un segnale luminoso a percorrere questa distanza è pari a  $t = 261.15 \text{ s}$ .  
In tale tempo, il Rover su Marte percorre una distanza  $x$  pari a*

$$x = v \cdot t = 23 \text{ cm/s} \cdot 261.15 \text{ s} = 6006.5 \text{ cm} = 60.06 \text{ m}$$

*In questo caso se i tecnici inviassero un messaggio di "stop ai motori" esso arriverebbe ben prima che il Rover abbia percorso i 135 m che lo separano dal precipizio. In generale, poiché il tempo necessario al Rover per percorrere 135 m è di 586.96 s, i tecnici sarebbero in grado di fermarlo in tempo solo nel caso in cui la distanza Terra-Marte risultasse inferiore a circa  $88 \cdot 10^6 \text{ km}$ .*

### **3. Un Ammasso Stellare non risolto**

È stato scoperto un ammasso composto da un certo numero  $N$  stelle tutte uguali al Sole. L'ammasso, non risolto dalle osservazioni, si trova ad una distanza  $d = 13.8 \text{ kpc}$ . Sapendo che la magnitudine totale dell'ammasso è  $m_{\text{TOT}} = 15$ , calcolare il numero di stelle  $N$  da cui è composto l'ammasso.



**Soluzione.** Chiamiamo  $F_{\text{TOT}}$  il flusso complessivo proveniente dall'ammasso. Esso è legato alla magnitudine totale  $m_{\text{TOT}}$  dalla formula di Pogson:

$$m_{\text{TOT}} = m_0 - 2.5 \log \frac{F_{\text{TOT}}}{F_0}$$

*essendo  $F_0$  il flusso di riferimento ed  $m_0$  la corrispondente magnitudine di riferimento.  $F_{\text{TOT}}$ , del resto, è la somma dei flussi provenienti dalle  $N$  stelle dell'ammasso. Questi flussi, per definizione, sono tutti uguali e possiamo quindi indicarli tutti con la lettera  $F$ . Al generico flusso  $F$  corrisponde una magnitudine apparente*

$$m = m_0 - 2.5 \log \frac{F}{F_0}$$

*che, per i dati del problema, è uguale alla magnitudine apparente che avrebbe il Sole se fosse osservato da una distanza di 13.8 kpc. Applicando quindi la formula del modulo di distanza, e sapendo che la magnitudine assoluta del Sole  $M$  è pari a 4.83, si ha:*

$$m = M + 5 \log d - 5 = 4.83 + 5 \log (13800) - 5 = 20.53$$

*Ora, il flusso totale  $F_{\text{TOT}}$  sarà semplicemente dato da  $F_{\text{TOT}} = N \cdot F$ . Sostituendo nella prima espressione della formula di Pogson, otteniamo quindi:*

$$m_{\text{TOT}} = m_0 - 2.5 \log \frac{NF}{F_0} = m_0 - 2.5 \log \frac{F}{F_0} - 2.5 \log N = m - 2.5 \log N$$

*da cui*

$$2.5 \log N = m - m_{\text{TOT}}$$

*Si ricava in definitiva*

$$2.5 \log N = 20.53 - 15 = 5.53$$

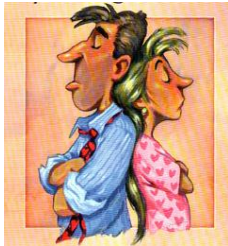
*da cui*

$$\log N = 2.212$$

e quindi

$$N = 10^{2.212} = 162.93 = 163$$

L'ammasso (non risolto otticamente) è composto da 163 stelle identiche al Sole.



#### 4. Tra moglie e marito...

Disegnare sullo stesso grafico le orbite delle due comete P/HUSB (distanza all'afelio  $d_a=15$  UA, eccentricità  $e=0.23$ ) e P/WIFE ( $d_a=15$  UA,  $e=0.95$ ). Le due comete hanno la stessa linea degli apsidi. Indicare chiaramente sul grafico a quale cometa si riferisce ciascuna orbita, l'unità grafica di misura e la posizione del Sole. Nel 2008 la configurazione astronomica vedeva entrambe le comete nei pressi del perielio. Quale sarà, all'incirca, la configurazione astronomica nel 2029 ?

**Soluzione.** Per disegnare le due orbite, dobbiamo calcolarne il semiasse maggiore "a" ed il semiasse minore "b". Per utilizzare i dati del problema, dobbiamo ricordare le definizioni di eccentricità "e" in termini dei semiasse a, b e delle distanze al perielio e all'afelio  $d_p$ ,  $d_a$  e ricordare la relazione tra  $d_a$ ,  $d_p$  ed a:

$$e = \sqrt{1 - b^2 / a^2}$$

$$e = (d_a - d_p) / (d_a + d_p)$$

$$d_a + d_p = 2a$$

In base alla seconda relazione, troviamo  $d_p$  come espressione di  $d_a$  ed e:

$$(d_a + d_p)e = d_a - d_p$$

$$d_p(1+e) = d_a(1-e)$$

ovvero

$$d_p = [(1-e)/(1+e)]d_a$$

Ricaviamo quindi le distanze al perielio, e possiamo riassumere tutto nella seguente tabella:

Nome	$d_a$ (u.a.)	$d_p$ (u.a.)	e
P / HUSB	15	9.390	0.23
P / WIFE	15	0.385	0.95

Noti  $d_a$  e  $d_p$ , possiamo immediatamente calcolare il semiasse maggiore  $a = (d_a + d_p) / 2$ , nonché il semiasse minore b invertendo la prima relazione:  $b = a \sqrt{1 - e^2}$

Possiamo quindi aggiungere altre due colonne alla tabella creata poco fa:

Nome	$d_a$ (u.a.)	$d_p$ (u.a.)	$a$ (u.a.)	$b$ (u.a.)	$e$
<i>P / HUSB</i>	15	9.390	12.195	11.868	0.23
<i>P / WIFE</i>	15	0.385	7.692	2.402	0.95

Abbiamo finalmente i dati per disegnare le orbite delle due comete. Poiché hanno la stessa linea degli apsidi, gli assi maggiori giacciono sulla stessa retta.

Per rispondere alla seconda domanda, occorre calcolare anche i periodi di rivoluzione. Lo facciamo grazie alla III Legge di Keplero assumendo come riferimento la Terra, per la quale  $d=1$  UA e  $T = 1$  anno. Così facendo la III legge di Keplero assume la forma

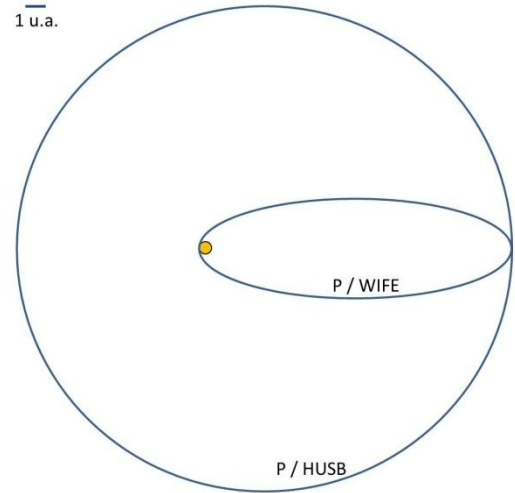
$$T^2 (\text{anni}) = a^3 (\text{UA})$$

Avremo quindi:

$$\text{Periodo Cometa HUSB} = 42.586 \text{ anni}$$

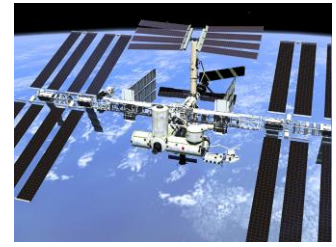
$$\text{Periodo Cometa WIFE} = 21.333 \text{ anni.}$$

Nel 2029 saranno trascorsi 21 anni dal momento in cui ambedue le comete erano nei pressi del perielio. Come si vede dal grafico, in tale intervallo di tempo la Cometa *P/WIFE* avrà eseguito praticamente una rivoluzione completa, mentre la Cometa *P/HUSB* ne avrà eseguita metà. Se ne conclude che nel 2029 la *P/WIFE* sarà di nuovo prossima al perielio, mentre la *P/HUSB* sarà prossima all'afelio.



## 5. I passaggi della Stazione Spaziale

La Stazione Spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra ad un'altezza di circa 400 km. Supponendo la sua orbita circolare e trascurando l'effetto di rallentamento dovuto agli strati superiori dell'atmosfera terrestre, calcolare quanto tempo impiega ad effettuare una rivoluzione completa intorno al nostro pianeta. Per un osservatore posto in un punto della Terra dal quale la ISS viene vista transitare allo zenith, quanto dura il passaggio da un orizzonte all'altro ?



**Soluzione.** La risposta alla prima domanda è pressoché immediata, applicando la III Legge di Keplero:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

dove  $M = 5.974 \times 10^{24}$  kg è la massa della Terra,  $G = 6.67 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup> è la costante di gravitazione universale,  $a$  è la distanza della ISS dal centro della Terra (e quindi  $a = R + h$ , dove  $R = 6372.8$  km è il raggio terrestre ed  $h = 400$  km è l'altezza della ISS sulla superficie terrestre) e  $T$  il periodo cercato. Nell'espressione adottata, si è assunto, ovviamente, che la massa della ISS sia trascurabile rispetto alla massa della Terra. Se ne ricava:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (R+h)^3}{GM}} = 5548.0 \text{ s}$$

Il periodo di rivoluzione della ISS è dunque di 5548.0 secondi = 1.54 ore .

La risposta alla seconda domanda **non** è, come si potrebbe credere, semplicemente la metà del periodo di rivoluzione, cioè circa 46 minuti. Va infatti considerata la geometria di osservazione e soprattutto il fatto che la ISS non si trova, rispetto alla superficie terrestre, ad una distanza molto più grande del raggio della Terra. Di conseguenza, quando la ISS compare sull'orizzonte dell'osservatore, le congiungenti tra osservatore e centro della Terra e tra ISS e centro della Terra non formano un angolo di 90°, ma un angolo  $\alpha$  legato ad  $R$  e ad  $h$  dalla relazione (figura 3)

$$\cos \alpha = \frac{R}{a} = \frac{R}{R+h}$$

Se ne ricava

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{R}{R+h} \right) = 19.79^\circ$$

La lunghezza angolare del tratto di orbita visibile al di sopra dell'orizzonte, nell'approssimazione di trascurare la rotazione della Terra, è dunque pari a  $2\alpha$ . A questo punto, considerando che l'orbita è circolare e quindi la velocità orbitale è costante, possiamo semplicemente impostare una

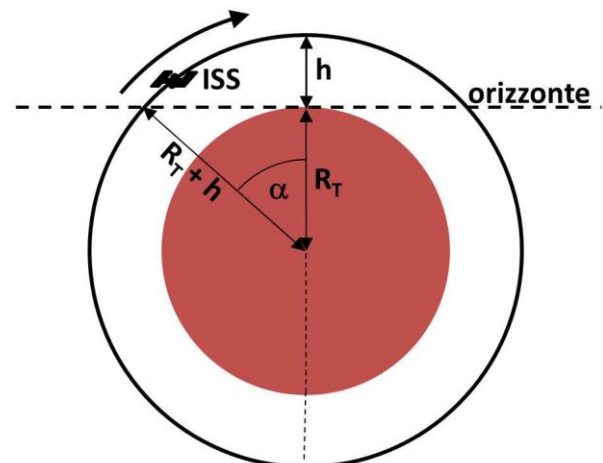


Figura 3

proporzione tra il tempo di attraversamento  $t_{attr}$  necessario a percorrere il tratto  $2\alpha$  ed il periodo  $T$  necessario a percorrere un intero angolo giro:

$$t_{attr} : 2\alpha = T : 360^\circ$$

da cui in definitiva

$$t_{attr} = (2 \cdot 19.79^\circ \cdot 5548.0) / 360^\circ = 609.97 \text{ s} \cong 10 \text{ minuti e } 10 \text{ secondi}$$

Questo tempo di attraversamento è molto piccolo rispetto al periodo di rotazione della Terra, e questo giustifica l'approssimazione fatta sopra.

*Nota: consultando il sito internet [www.heavens-above.com](http://www.heavens-above.com) è possibile cercare i passaggi previsti della ISS per un dato luogo. I tempi massimi di transito riportati sono sempre inferiori a 6 minuti. Questo perché in realtà si considera il transito osservabile solo quando la ISS è almeno  $10^\circ$  al di sopra dell'orizzonte. Svolgendo i calcoli (che coinvolgono tuttavia nozione di trigonometria avanzata, come il teorema dei seni) si trova che, in queste ipotesi, i tempi di transito sono effettivamente dell'ordine di poco più di 5 minuti.*