OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2022

Gara interregionale – 25 febbraio

Categoria Senior

1. Curiosity "a dieta"

Calcolate la variazione percentuale del peso del rover Curiosity (massa = 900 kg), se questo si spostasse da uno dei poli all'equatore di Marte. Assumete che il pianeta abbia forma sferica e che la massa del rover non cambi nel corso dello spostamento.

Soluzione

Detta **m** la massa del rover, poiché l'effetto della rotazione di Marte è nullo ai poli, il peso di Curiosity $\mathbf{P_{poli}}$ è determinato unicamente dalla legge di gravitazione universale. Detti **M** la massa di Marte e **R** il suo raggio si ha:

$$P_{poli} = m\frac{G\,M}{R^2} \simeq 900\text{ kg}\cdot\frac{6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 6.417\cdot 10^{23}\text{ kg}}{(3397\cdot 10^3\text{ m})^2} \simeq 3340\text{ N}\,.$$

Se invece Curiosity si spostasse verso l'equatore di Marte, il suo peso sarebbe attenuato dalla rotazione del pianeta. Detto **T** il periodo di rotazione di Marte, la velocità di rotazione all'equatore $\mathbf{v_{rot}}$ è

$$v_{rot} = \frac{2\,\pi\,R}{T} \simeq \frac{2\,\pi\cdot 3397\cdot 10^3\text{ m}}{88644\text{ s}} \simeq 240.8\,\frac{m}{s}$$

e in un sistema di riferimento solidale con il pianeta la forza centrifuga $\mathbf{F_c}$ a cui è sottoposto Curiosity è:

$$F_c = \frac{m\cdot v^2}{R} \simeq \frac{900\text{ kg}\cdot(240.8\text{ m/s})^2}{3397\cdot 10^3\text{ m}} \simeq 15.4\text{ N}\,.$$

Dato che all'equatore le due forze hanno la stessa direzione ma verso opposto, il peso P_{eq} di Curiosity all'equatore di Marte è:

$$P_{eq} = P_{poli} - F_c \simeq 3325\text{ N}\,,$$

che corrisponde a una variazione percentuale $\Delta_{\%}$:

$$\Delta_{\%} = \frac{P_{poli} - P_{eq}}{P_{poli}}\cdot 100 \simeq \frac{15.4\text{ N}}{3340\text{ N}}\cdot 100 \simeq 0.46\,\%\,.$$

2. Un Sole pulsante

Le variabili cefeidi sono stelle pulsanti: il loro raggio e la loro luminosità variano periodicamente attorno a un valore medio. Nel 1922 l'astronoma Henrietta Leavitt scoprì che esiste una relazione tra il periodo **P** (in giorni) e la magnitudine assoluta media **M** di queste stelle. Con i valori oggi accettati per le costanti, la relazione è:

$$M = -2.85\log P - 1.37\,.$$

1. Calcolate il periodo di pulsazione, in minuti, del Sole se fosse una stella cefeide.
2. Se durante la pulsazione la temperatura della fotosfera del Sole aumentasse di 1000 K e il suo raggio diminuisse del 20%, calcolate quanto varrebbe in quel momento la sua magnitudine assoluta.

Considerate i dati del Sole presenti in tabella quali valori medi.

Soluzione

a) Detta $\mathbf{M_\odot}$ la magnitudine assoluta media del Sole, dalla formula di Leavitt otteniamo:

$$P = 10^{\left(\frac{M_\odot + 1.37}{-2.85}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{4.83+1.37}{-2.85}\right)} \simeq 6.68\cdot 10^{-3}\text{ giorni} \simeq 9.61\text{ minuti}\,.$$

b) Detti $\mathbf{R_\odot}$ e $\mathbf{T_\odot}$ il raggio e la temperatura della fotosfera del Sole a cui corrisponde la magnitudine assoluta $\mathbf{M_\odot}$, dalla legge di Stefan-Boltzmann la luminosità $\mathbf{L_\odot}$ vale:

$$\mathbf{L_\odot} = 4\,\pi\,\mathbf{R_\odot}^2\,\sigma\,\mathbf{T_\odot}^4\,.$$

Dette $\mathbf{M_P}$ la magnitudine assoluta del Sole nella fase di pulsazione in cui la temperatura aumenta di 1000 K e il raggio diminuisce del 20% e $\mathbf{L_P}$ la corrispondente luminosità si ha:

$$M_P - M_\odot = -2.5\,\log\frac{L_P}{L_\odot}$$

$$M_P = M_\odot - 2.5\ \log\left[\frac{4\ \pi\ (0.8\ \cdot\ R_\odot)^2\ \sigma\ (1000 +\ T_\odot)^4}{4\ \pi\ R_\odot{}^2\ \sigma\ T_\odot{}^4}\right]$$

$$M_P \ \simeq 4.83 - 2.5 \log\left[\frac{0.64\ \cdot\ (6778\ K)^4}{(5778\ K)^4}\right] \simeq\ 4.83 - 2.5 \log 1.21\ \simeq 4.62\ .$$

3. Risolvimi un buco nero

La Via Lattea ospita al suo centro un buco nero con una massa di $4.20 \cdot 10^6$ masse solari. Determinate il diametro minimo dello specchio di un telescopio con potere risolutivo nella banda visibile (lunghezza d'onda 5500 Å) pari al diametro dell'orizzonte degli eventi di detto buco nero. Commentate qualitativamente il risultato ottenuto.

Soluzione

Dato un qualsiasi corpo di massa **M** e raggio **R**, la velocità di fuga $\mathbf{v_f}$ (o seconda velocità cosmica) è data dalla relazione:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\ G\ \cdot M}{R}}\ .$$

Il raggio dell'orizzonte degli eventi di un buco nero è definito come la distanza dal centro in cui la velocità di fuga è pari alla velocità della luce. La distanza $\mathbf{R_S}$ così ottenuta è detta raggio di Schwarzschild e nel caso in esame vale:

$$R_S = \frac{2\ G \cdot M}{c^2} \simeq \frac{2\ \cdot\ 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 4.20\ \cdot\ 10^6\ \cdot 1.989\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{8.9875\ \cdot\ 10^{16}\ \frac{m^2}{s^2}} \simeq 1.24\ \cdot 10^{10}\ m\ .$$

Quindi il diametro $\mathbf{D_{BN}}$ dell'orizzonte degli eventi del buco nero al centro della Via Lattea è:

$$D_{BN} = 2\ R_S\ \simeq\ 2.48\ \cdot 10^{10}\ m\ .$$

Detta $\mathbf{D_{SG}}$ la distanza del Sole dal centro della Via Lattea, il diametro angolare $\boldsymbol{\theta}$ del buco nero è:

$$\theta = \arctan\left(\frac{D_{BN}}{D_{SG}}\right) \simeq \arctan\left(\frac{2.48\ \cdot 10^{10}\ m}{27.2\ \cdot\ 10^3\ \text{anni luce}\ \cdot 9460.7\ \cdot\ 10^{12}\ \frac{m}{\text{anni luce}}}\right) \simeq \arctan 9.64\ \cdot\ 10^{-11}\ .$$

Da cui:

$$\theta\ \simeq 5.52\ \cdot\ 10^{-9}\text{gradi} = 1.99\ \cdot\ 10^{-5}\ \text{secondi d'arco}\ .$$

Il potere risolutivo $\boldsymbol{\theta}$ in secondi d'arco di un telescopio con apertura **D** per osservazioni alla lunghezza d'onda $\boldsymbol{\lambda}$ si ottiene dalla relazione:

$$\theta = 1.22\ \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot 206265''\ ,$$

da cui ricaviamo il diametro del telescopio capace di risolvere, alla lunghezza d'onda considerata, il buco nero al centro della Via Lattea:

$$D = 1.22\ \cdot \frac{\lambda}{\theta} \cdot 206265'' =\ 1.22\ \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10}\ m\ \cdot\ 206265''}{1''.99\ \cdot\ 10^{-5}}\ =\ 6.95 \cdot 10^3\ m\ .$$

Un singolo telescopio dovrebbe quindi avere un diametro di quasi 7 km. Considerando che il più grande telescopio attualmente in fase di costruzione avrà uno specchio con diametro di 39 m, si tratta di uno strumento attualmente irrealizzabile.

4. Identikit di una stella VIP

Una nota stella ha una luminosità di $1.60 \cdot 10^{29}$ W e un raggio di $30.7 \cdot 10^6$ km. Calcolate la temperatura della sua fotosfera e la lunghezza d'onda del picco della sua emissione luminosa. In base a queste caratteristiche, determinate quale tra le seguenti stelle corrisponde all'identikit:

1. Rigel (classe spettrale B8);
2. Aldebaran (classe spettrale K5).

Soluzione

La temperatura **T** della fotosfera di una stella, noti il suo raggio **R** e la sua luminosità **L**, si ricava dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi\ R^2\ \sigma\ T^4\ ,$$

da cui:

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\pi\, R^2\, \sigma}} \simeq \sqrt[4]{\frac{1.60 \cdot 10^{29}\ \text{W}}{4\pi\ \cdot\ (30.7 \cdot 10^9 \text{m})^2\ \cdot\ 5.670 \cdot 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-4}}} \simeq\ 3930\ \text{K}\,.$$

Dalla legge dello spostamento di Wien la lunghezza d'onda del picco di emissione della stella è:

$$\lambda\ =\ \frac{b}{T}\ =\ \frac{2.898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{3930\ \text{K}}\ \simeq\ 7.37 \cdot 10^{-7}\text{m}\ =\ 7370\ \text{Å}\,.$$

La stella in questione è più fredda e più rossa del Sole, il cui tipo spettrale è G2: si tratta di Aldebaran. Ovviamente il nome della stella poteva essere ricavato da una sola delle due grandezze ricavate.

5. La Terra allo zenith

Da un punto sulla superficie della Luna la Terra piena è vista allo zenith e ha, in media, una magnitudine apparente integrata $m_{int} = -16.2$. Trascurando il fenomeno delle librazioni:

1. calcolate la magnitudine superficiale media della Terra in magnitudini/arcsec^2;
2. stimate la magnitudine apparente media della Terra piena da un punto della superficie lunare dal quale la Terra è vista appena sopra l'orizzonte (il bordo inferiore della Terra tocca l'orizzonte lunare);
3. assumendo per la Terra una declinazione di $+5°$ in un sistema di coordinate equatoriali lunare, stimate le coordinate geografiche delle regioni della Luna da cui la Terra può essere osservata allo zenith.

Soluzione

1. La relazione che lega la magnitudine apparente integrata $\mathbf{m_{int}}$ di una sorgente estesa con la sua magnitudine superficiale $\mathbf{m_{sup}}$ e la sua area apparente **A** è:

$$m_{int}\ =\ m_{sup}\ -2.5\log A\,.$$

   Detti **D** la distanza Terra-Luna, $\mathbf{R_T}$ e $\mathbf{R_L}$ i raggi della Terra e della Luna, il raggio angolare medio $\boldsymbol{\alpha_{TZ}}$ della Terra osservata da un punto sulla superficie della Luna dove la si vede allo zenith vale:

$$\alpha_{TZ}\ = \text{arcsen}\left(\frac{R_T}{D-\ R_L}\right) \simeq \text{arcsen}\left(\frac{6378\ \text{km}}{384.4\ \cdot\ 10^3\ \text{km}-\ 1738\ \text{km}}\right) \simeq 0°.9550 = 3438''.$$

   L'area apparente **A** della Terra vale:

$$A =\ \pi\ \cdot\ {\alpha_T}^2\ \simeq 2.865\ \text{gradi quadrati}\ \simeq 3.713\ \cdot\ 10^7\ \text{arcsec}^2\,.$$

   La magnitudine superficiale della Terra vale:

$$m_{sup} =\ m_{int} + 2.5\log A\ \simeq\ -16.2 + 2.5\log\ (3.713\ \cdot\ 10^7) \simeq\ 2.7\frac{\text{mag}}{\text{arcsec}^2}\,.$$

2. Trascurando le librazioni, la posizione della Terra nel cielo della Luna è fissa. Inoltre la Luna non ha atmosfera e quindi in assenza di assorbimento la variazione di magnitudine apparente può essere dovuta solo alla variazione del suo diametro apparente. Possiamo valutare il massimo di questa variazione considerando che un punto sulla superficie della Luna dove la Terra è vista interamente appena sopra l'orizzonte dista al massimo 90° da un punto dove la Terra è vista allo zenith. Da un tale punto il raggio angolare medio $\boldsymbol{\alpha_{TO}}$ della Terra è:

$$\alpha_{TO}\ = \text{arcsen}\left(\frac{R_T}{\sqrt{D^2+\ {R_L}^2}}\right) \simeq \text{arcsen}\left(\frac{6378\ \text{km}}{384.4\ \cdot\ 10^3\ \text{km}}\right) \simeq 0°.9507 = 3423''.$$

   L'area apparente $\mathbf{A_O}$ della Terra è:

$$A_O =\ \pi \cdot \alpha_0^2\ \simeq 2.840\ \text{gradi quadrati}\ \simeq 3.681\ \cdot\ 10^7\ \text{arcsec}^2\,.$$

   Quindi al massimo la magnitudine apparente integrata $\mathbf{m_{int\text{-}0}}$ sarà:

$$m_{int-0}\ =\ m_{sup}\ -2.5\log A_O\ \simeq\ 2.7 - 2.5\log\ (3.681\ \cdot\ 10^7) \simeq\ -16.2 =\ m_{int}\,.$$

3. Possiamo definire un sistema di coordinate geografiche lunari e un sistema di coordinate celesti equatoriali lunari in modo del tutto analogo a quanto si fa per la Terra.
   Poiché la Terra è fissa nel cielo della Luna, assumiamo come meridiano di riferimento delle coordinate geografiche lunari, quindi con longitudine $\lambda = 0°$, quello da cui la Terra è vista in direzione sud. Solo dai punti che si trovano alla longitudine di 0° si potrà osservare la Terra allo zenith.
   Nel sistema di coordinate celesti equatoriali della Luna, analogamente a quanto accade sulla Terra, l'altezza massima $\mathbf{h_{max}}$ di un oggetto con declinazione $\boldsymbol{\delta}$ osservato da una località a latitudine $\boldsymbol{\varphi}$ è:

$$h_{max} = 90° -\ \varphi +\ \delta\,.$$

   Se la Terra ha declinazione $+5°$ sarà vista allo zenith solo da un punto con coordinate geografiche lunari:

$$\lambda = 0° \qquad \varphi = +5° .$$

Si dice che una sorgente estesa, quale è la Terra vista dalla Luna, si trova allo zenith se copre lo zenith con una parte della sua superficie. Considerando per il raggio apparente della Terra il valore $\boldsymbol{\alpha}_{TZ}$, con buona approssimazione ricaviamo che se la Terra ha declinazione +5° può essere osservata allo zenith da tutti i punti sulla superficie della Luna con coordinate:

$$0° - 2\,\alpha_{TZ} \;\leq\; \lambda \;\leq\; 0° + 2\,\alpha_{TZ} \qquad\qquad 5° - 2\,\alpha_{TZ} \;\leq\; \varphi \leq\; +5° + 2\,\alpha_{TZ} .$$