XIX OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA

Finale Nazionale – 3 luglio 2021

Prova Teorica - Categoria Junior 2

1. Come ti peso il buco nero

Nel 2020 A. Ghez e R. Genzel hanno vinto il premio Nobel per la fisica per avere dimostrato l'esistenza di un buco nero supermassiccio al centro della Via Lattea. Il seguente problema ripropone, in maniera molto semplificata, il metodo da loro utilizzato.
A. Ghez e R. Genzel hanno osservato una stella in orbita circolare intorno al centro della nostra galassia. Lo spostamento Doppler delle linee spettrali mostra che il modulo della velocità orbitale (corretta per l'inclinazione dell'orbita rispetto alla linea di vista) è costante e vale v = 1783 km/s. L'orbita viene completata in T = 20.2 anni. Ricavate la massa del buco nero del centro galattico in masse solari.

Soluzione

Poiché l'orbita è circolare, il modulo della velocità tangenziale **V** è costante e detto **R** il raggio dell'orbita della stella vale la relazione:

$$2\,\pi\,R = V \cdot T$$

da cui ricaviamo:

$$R = \frac{V\ \cdot T}{2\,\pi} = \frac{1783\ \frac{km}{s}\ \cdot 20.2\ anni}{2\,\pi} \simeq \frac{1.783\ \cdot\ 10^6\ \frac{m}{s}\ \cdot 6.37\ \cdot\ 10^8\ s}{6.283} \simeq 1.81\ \cdot\ 10^{14}\ m$$

Poiché la stella è in orbita attorno al buco nero, il modulo della sua velocità deve essere pari alla prima velocità cosmica. Quindi dette **M** la massa del buco nero e $\mathbf{M}_\odot$ la massa del Sole si ha:

$$V = \sqrt{\frac{G\ \cdot M}{R}}$$

$$M = \frac{V^2\ \cdot R}{G} = \frac{3.179\ \cdot\ 10^{12}\ \frac{m^2}{s^2}\ \cdot\ 1.81\ \cdot\ 10^{14}\ m}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}} \simeq 8.62\ \cdot\ 10^{36}\ kg\ \simeq 4.33\ \cdot\ 10^6\ \mathrm{M}_\odot$$

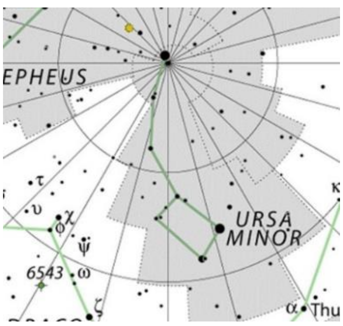
2. Il navigatore incauto

Un velista armato solo di una bussola e di un sestante, in grado di misurare l'altezza degli astri con una precisione di 1', decide di effettuare una traversata notturna. Salpa in serata da una località di latitudine nota con l'intento di approdare prima dell'alba su un isolotto posto alla stessa latitudine della località di partenza, assicurandosi di navigare a latitudine costante grazie al controllo continuo dell'altezza sull'orizzonte della stella polare (α = 02h 31m 48s, δ_= +89° 15' 51''). Il velista suppone incautamente che la stella polare coincida con il polo nord celeste: a quale distanza massima dal punto previsto di approdo rischia di arrivare? Considerate solo lo spostamento in latitudine.

Soluzione

La differenza $\boldsymbol{\Delta\delta}$ di declinazione tra la stella polare (α UMi) e il polo nord celeste è pari a:

$$\Delta\delta = 90° - 89°\,15'\,51'' = \ 44'\,9''$$



Quindi la stella polare non coincide con il polo nord celeste e, a causa della rotazione terrestre, la sua altezza sull'orizzonte cambia con il trascorrere del tempo e la osserviamo percorrere un cerchio di raggio Δδ centrato sul polo nord celeste.
Il velista, assumendo che la latitudine sia pari all'altezza sull'orizzonte della stella polare, può sbagliare quindi di ben 44' 9'' in eccesso (quando la stella polare si trova in culminazione superiore) o di 44' 9'' in difetto (quando la stella polare si trova in culminazione inferiore).

Detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra e $\mathbf{X}$ la lunghezza dell'arco di meridiano sotteso da un angolo di 44' 09'', vale la relazione:

$$360° \;:\; 2\,\pi\, R_T = 44'\,9'' \;:\; X$$

da cui:

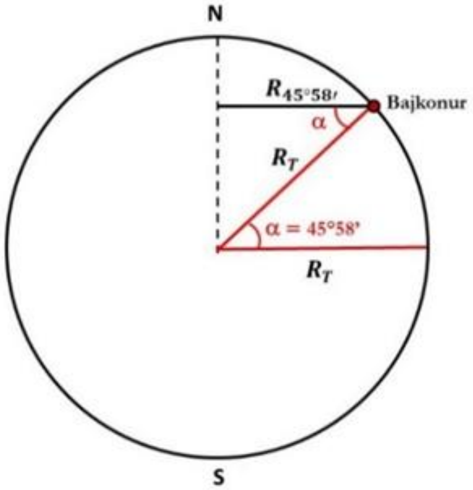
$$X = \frac{44'\,9''}{360°} \cdot 2\,\pi\, R_T \;\simeq\; \frac{0°.7358}{360°} \cdot 2\,\pi\, \cdot 6378\,km \;\simeq 81.91\,km$$

Il velista, procedendo con l'ipotesi che la stella polare coincida con il polo nord celeste, rischia di mancare l'approdo di quasi 82 km, sia in direzione nord sia in direzione sud.

3. L'orbita di Gagarin

Il 12 aprile 1961 Jurij Gagarin completa la prima storica orbita attorno alla Terra. Partito dalla base di Bajkonur ($\varphi = +45°\ 58'$, $\lambda = 63°\ 20'$ E) a bordo della Vostok 1, atterra nei pressi della città di Éngel's dopo un volo di durata totale pari a 108 minuti. Tuttavia, approssimando la salita e la discesa a traiettorie perpendicolari alla superficie terrestre, la Vostok 1 impiega solo 67 minuti per percorrere l'orbita completa. Assumete che le località di arrivo e partenza si trovino alla stessa latitudine e stimate:
1. la distanza, misurata lungo il parallelo che li unisce, tra Bajkonur ed Éngel's;
2. la longitudine di Éngel's.

Soluzione



1. L'orbita della Vostok 1 è fissa nello spazio, per cui dopo un'orbita completa Gagarin torna al punto iniziale, ma nel frattempo la Terra sottostante ha ruotato e questo causa una differenza in longitudine tra luogo di lancio e luogo di atterraggio.

   Con riferimento alla figura a sinistra, detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra, la lunghezza $\mathbf{C_{45°58'}}$ della circonferenza terrestre alla latitudine 45° 58' è data dalla relazione:

   $C_{45°58'} = 2\pi \cdot R_{45°58'} = 2\pi \cdot R_T \cdot \cos(45°\ 58') \simeq 2.785 \cdot 10^4$ km.

   La Terra effettua una rotazione completa in un giorno siderale, la cui durata è $\mathbf{P} \simeq$ 23h 56m 4s ($\simeq$ 23.9344 ore)

   Nel tempo ($\mathbf{\Delta T}$ = 67 m $\simeq$ 1.117 h) impiegato da Gagarin a percorrere l'orbita completa, per un punto a latitudine 45° 58' la rotazione della Terra comporta uno spostamento in longitudine $\mathbf{\Delta X}$, con le due quantità legate dalla proporzione:

   $$P : C_{45°58'} = \Delta T : \Delta X.$$

   avremo quindi:

   $$\Delta X = \frac{C_{45°58'} \cdot \Delta T}{P} \simeq \frac{2.785 \cdot 10^4\ \text{km} \cdot 1.117\ \text{h}}{23.9344\ \text{h}} \simeq 1300\ \text{km}.$$

2. La località di arrivo si trova a ovest rispetto a quella di partenza di un angolo $\boldsymbol{\alpha}$ e poiché vale la proporzione:

   $$360° : \alpha = C_{45°58'} : \Delta X$$

   ricaviamo:

   $$\alpha = \frac{360° \cdot 1300\ \text{km}}{2.785 \cdot 10^4\ \text{km}} \simeq 16°.8 \simeq 16°\ 50'.$$

   e infine:

   longitudine Éngel's $\simeq$ longitudine Bajkonur – 16° 50' $\simeq$ 46° 30' E.

   Nota: le coordinate esatte del punto di atterraggio di Gagarin sono state φ = 51° 16' N e λ = 46° E, con la vera distanza tra località di arrivo e partenza che risulta di circa 1400 km.

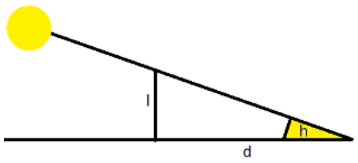
4. L'ombra dello gnomone

Un osservatore posto nell'emisfero nord nota che il Sole culmina a sud dello zenit e che la lunghezza minima dell'ombra di un'asta verticale che sporge esattamente 1 metro dal terreno è pari a 1.68 metri. Nello stesso giorno la lunghezza massima dell'ombra prodotta dalla stessa asta è 5.79 metri. Assumete il Sole come una sorgente puntiforme e calcolate:

1. la declinazione del Sole in quel giorno;
2. la latitudine dell'osservatore.

Soluzione

1. Poiché è stato possibile osservare e misurare la lunghezza massima e minima dell'ombra prodotta dall'asta verticale nello stesso giorno, il Sole era circumpolare alla latitudine dell'osservatore.



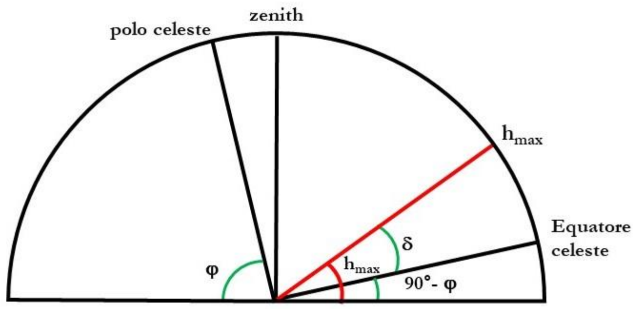
Detta **l** la lunghezza dell'asta verticale e **d** la lunghezza dell'ombra, il valore **h** dell'altezza del Sole sull'orizzonte in un istante generico è dato dalla relazione:

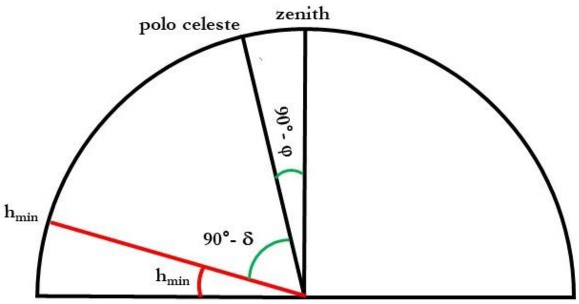
$$h = \arctan\frac{l}{d}$$

Dette $\mathbf{d_{min}}$ e $\mathbf{d_{max}}$ le lughezze minime e massime dell'ombra, l'altezza sull'orizzonte minima $\mathbf{h_{min}}$ e massima $\mathbf{h_{max}}$ che il Sole raggiunge nella località dell'osservatore valgono quindi:

$$h_{min} = \arctan\frac{l}{\mathrm{d_{max}}} = \arctan\frac{1\,m}{5.79\,m} \simeq 9°.80 \simeq 9°\,48'$$

$$h_{max} = \arctan\frac{l}{\mathrm{d_{min}}} = \arctan\frac{1\,m}{1.68\,m} \simeq 30°.76 \simeq 30°\,46'$$





Poiché sappiamo che il Sole culmina a sud dello zenit, consideriamo la figura in alto a sinistra. L'altezza sull'orizzonte dell'equatore celeste è pari a 90° - φ e poiché l'angolo tra l'equatore celeste e un astro è pari alla sua declinazione **δ** ricaviamo:

$$h_{max} = 90° - \varphi + \delta$$

Ricordando, vedere la figura in basso a sinistra, che la distanza angolare tra il polo celeste e lo zenit è pari a $90° - \varphi$ e che la distanza angolare tra un astro e il polo celeste è costante ed è pari a $90° - \delta$ ricaviamo:

$$h_{min} = -90° + \varphi + \delta$$

Sommando membro a membro le due relazioni, si ottiene la formula che lega l'altezza di un astro che culmina a sud dello zenit con la sua declinazione:

$$h_{max} + h_{min} = 2\,\delta$$

Indicando con $\delta_{\odot}$ la declinazione del Sole si ha:

$$\delta_{\odot} = \frac{h_{max} + h_{min}}{2} \simeq \frac{30°\,46' + 9°\,48'}{2} \simeq 20°\,17'$$

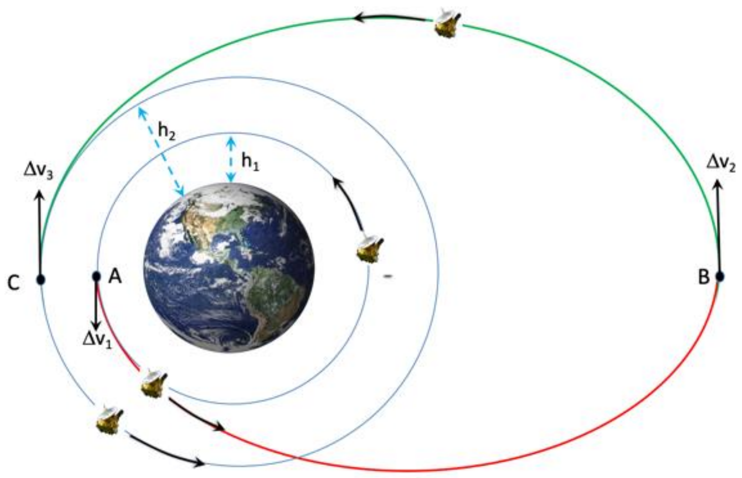
2. La latitudine dell'osservatore $\boldsymbol{\varphi}$ si può infine ricavare dalla relazione:

$$h_{max} = 90° - \varphi + \delta_{\odot}$$

da cui:

$$\varphi = 90° - \mathrm{h_{max}} + \delta_{\odot} \simeq 90° - 30°\,46' + 20°\,17' \simeq 79°\,31'.$$

5. Scuola guida spaziale



La figura a sinistra (non in scala) descrive una manovra di trasferimento orbitale detta "alla Sternfeld", che permette a un satellite di trasferirsi da una orbita circolare a un'altra di raggio maggiore, utilizzando due mezze orbite ellittiche. Nel caso in esame il satellite parte da una quota h_1 = 400 km dalla superficie terrestre effettuando dapprima nel punto A un aumento di velocità Δv_1 = 500 m/s che lo immette su un'orbita ellittica. Dopo mezza orbita ellittica, giunto al punto B, il satellite viene ulteriormente accelerato di Δv_2 = 200 m/s, per poi arrivare al punto C, a una distanza h_2 dalla superficie della Terra, dove viene frenato di Δv_3 per stabilizzarsi sulla nuova orbita circolare.

Determinate:

1. semiasse maggiore ed eccentricità della prima semi-orbita ellittica;
2. semiasse maggiore ed eccentricità della seconda semi-orbita ellittica;
3. quali sono la quota h_3 dell'orbita circolare finale e il Δv_3 necessario a stabilizzare il satellite sulla nuova orbita;
4. il tempo totale necessario per completare la manovra da A a C.

Soluzione

1. Dette $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra e $\mathbf{h_1}$ la quota iniziale del satellite si ha:

$$R_1 = R_T + h_1 = 6378\ km + 400\ km = 6778\ km$$

Detta $\mathbf{M_T}$ la massa della Terra, la velocità del satellite $\boldsymbol{v_0}$ nel punto A valeva quindi:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{G \cdot M_T}}{\mathrm{R_1}}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6.778 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}} \simeq 7.668 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7.668\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

La prima accelerazione porta la velocità del satellite a un valore $\boldsymbol{v_{1P}}$ pari a:

$$v_{1P} = v_0 + \Delta v_1 = 7668\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 500\ \frac{m}{s} = 8168\ \frac{m}{s}$$

e R_1 diventa la distanza al perigeo della prima semi-orbita ellittica, il cui semiasse maggiore $\boldsymbol{a_1}$ si ricava dalla relazione che lega la velocità in un qualsiasi punto dell'orbita (e quindi anche al perigeo) con il semiasse maggiore:

$$v_{1P} = \sqrt{G\ M_T\ \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a_1}\right)}$$

da cui otteniamo:

$$a_1 = \frac{1}{\frac{2}{\mathrm{R_1}} - \frac{\mathrm{v_{1P}^2}}{\mathrm{G} \cdot M_T}} = \frac{1}{\frac{2}{6778 \cdot 10^3\ \mathrm{m}} - \frac{6.672 \cdot 10^7\ \frac{m^2}{s^2}}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq 7.832 \cdot 10^6\ m = 7832\ km$$

L'eccentricità della prima semi-orbita ellittica $\mathbf{e_1}$ e la distanza all'apogeo $\mathbf{R_2}$ si ricavano dalle relazioni:

$$e_1 = 1 - \frac{R_1}{a_1} = 1 - \frac{6778 \cdot 10^3\ m}{7.832 \cdot 10^6\ m} \simeq 0.1345$$

$$R_2 = a_1\ (1 + e_1) = 7.832 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \cdot 1.1345 \simeq 8.885 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 8885\ km$$

2. Possiamo ricavare la velocità all'apogeo $\boldsymbol{v_{1A}}$ dalla conservazione del momento angolare (equivalente alla II legge di Keplero), $\boldsymbol{v_{1A} \cdot R_2 = v_{1P} \cdot R_1}$:

$$v_{1A} = \frac{v_{1P} \cdot R_1}{R_2} = \frac{8.168 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} \cdot 6.778 \cdot 10^3\ m}{8.885 \cdot 10^6\ m} \simeq 6.231 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} = 6231\ \frac{m}{s}$$

Una volta giunto all'apogeo della prima orbita ellittica (cioè nella posizione indicata con B in figura), il satellite viene accelerato alla velocità $\boldsymbol{v_{2A}}$ pari a:

$$v_{2A} = v_{1A} + \Delta v_2 = 6231\ \frac{m}{s} + 200\ \frac{m}{s} = 6431\ \frac{m}{s}$$

e il semiasse maggiore $\boldsymbol{a_2}$ della seconda orbita ellittica vale:

$$a_2 = \frac{1}{\frac{2}{\mathrm{R}_2} - \frac{\mathrm{v}_{2\mathrm{A}}^2}{\mathrm{G} \cdot M_T}} \simeq \frac{1}{\frac{2}{8.885\ \cdot 10^6\ m} - \frac{4.136\ \cdot\ 10^7\ \frac{m^2}{s^2}}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}} \simeq 8.242\ \cdot\ 10^6\ m = 8242\ km$$

Ovviamente si ha $R_2 > a_2$, poiché R_2 è la distanza all'apogeo della seconda orbita ellittica, la cui eccentricità $\boldsymbol{e_2}$ vale:

$$e_2 = \frac{R_2}{a_2} - 1 = \frac{8.885\ \cdot\ 10^6\ m}{8.242\ \cdot\ 10^6\ m} - 1\ \simeq 0.07802$$

3. Dopo mezzo periodo sulla seconda orbita ellittica, il satellite arriva al perigeo (posizione indicata con C in figura), cioè a una distanza $\mathbf{R_3}$ dal centro della Terra pari a:

$$R_3 = a_2\,(1 - e_2) = 8.242\ \cdot\ 10^6\ m\ \cdot\ 0.9220\ \simeq 7.599\ \cdot\ 10^6\ m = 7599\ km$$

Ovvero a una quota $\boldsymbol{h_2}$ rispetto alla superficie della Terra pari a:

$$h_2 = R_3 - R_T = 7599\ km - 6378\ km = 1221\ km$$

con una velocità $\boldsymbol{v_{2P}}$ che, dalla conservazione del momento angolare (o II legge di Keplero), vale:

$$v_{2P} = \frac{v_{2A}\,R_2}{R_3} = \frac{6.431\ \cdot\ 10^3\ \frac{m}{s}\ \cdot\ 8.885\ \cdot\ 10^6\ m}{7.599\ \cdot\ 10^6\ m} \simeq 7.519\ \cdot\ 10^3\ \frac{m}{s}$$

mentre la velocità v_3 che il satellite deve avere su un'orbita circolare alla stessa distanza dal centro della Terra R_3 è pari alla prima velocità cosmica:

$$v_3 = \sqrt{\frac{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M_T}}{\mathrm{R_3}}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}{7.599\ \cdot\ 10^6\ m}} \simeq 7.242\ \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Quindi per entrare in orbita circolare il satellite dovrà decelerare di $\boldsymbol{\Delta v_3}$ pari a:

$$\Delta v_3 = v_3 - v_{2P} \simeq 7.242\ \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 7.519\ \cdot\ 10^3\ \frac{m}{s} \simeq -0.277\ \cdot\ 10^3\ \frac{m}{s} = -277\ \frac{m}{s}$$

4. Il tempo totale $\mathbf{T}$ necessario alla manovra è pari alla somma della metà dei due periodi orbitali $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$, cioè:

$$T = \frac{1}{2}\,T_1 + \frac{1}{2}\,T_2$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2\,{a_1}^3}{G\,M_T}} + \sqrt{\frac{\pi^2\,{a_2}^3}{G\,M_T}}$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2\ \cdot 4.804\ \cdot\ 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}} + \sqrt{\frac{\pi^2\ \cdot\ 5.599\ \cdot\ 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}} \simeq 7.173\ \cdot\ 10^3\ s \simeq 2\ h$$