XIX OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA

Finale Nazionale – 3 luglio 2021

Prova Teorica - Categoria Junior 1

1. Osservare le Pleiadi

Un amico russo vi chiede se sarà possibile osservare, in qualche periodo dell'anno, M45 (α = 3h 47m 00s, δ = 24° 07' 00"), l'ammasso aperto delle Pleiadi, da San Pietroburgo (φ = 59° 56' 19" N, λ = 30° 56' 50" E). Giustificate la risposta con gli opportuni calcoli, trascurando la rifrazione atmosferica.

Soluzione

Nell'emisfero settentrionale da una località a latitudine $\boldsymbol{\varphi}$ sono visibili, in qualche periodo dell'anno, tutti gli oggetti con declinazione $\boldsymbol{\delta}$ tale che:

$$5\,\delta > \varphi - 90°$$

Quindi da San Pietroburgo saranno visibili tutti gli oggetti con:

$$\delta > 59°\,56'19'' - 90° > -30°\,3'41''$$

Potete dire all'amico russo che da San Pietroburgo le Pleiadi sono osservabili.

2. L'orbita dell'asteroide

Il raggio vettore che congiunge il Sole con un asteroide spazza un decimo dell'area totale racchiusa dall'orbita dell'asteroide in 5 mesi. Qual è il periodo di rivoluzione dell'asteroide?

Soluzione

La II legge di Keplero afferma che "il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro di un pianeta (più in generale con qualsiasi corpo del Sistema Solare) spazza aree uguali in tempi uguali". Dette **A** l'area racchiusa dall'orbita e **T** il periodo di rivoluzione dell'asteroide si ha quindi:

$$A : \frac{A}{10} = T : 5\,mesi$$

da cui:

$$\frac{A\ \cdot T}{10} = A\ \cdot 5\,mesi$$

e infine:

$$T = 10\ \cdot 5\,mesi = 50\,mesi = 4\,anni\ e\ 2\,mesi$$

3. Come ti peso il buco nero

Nel 2020 A. Ghez e R. Genzel hanno vinto il premio Nobel per la fisica per avere dimostrato l'esistenza di un buco nero supermassiccio al centro della Via Lattea. Il seguente problema ripropone, in maniera molto semplificata, il metodo da loro utilizzato.

A. Ghez e R. Genzel hanno osservato una stella in orbita circolare intorno al centro della nostra galassia. Lo spostamento Doppler delle linee spettrali mostra che il modulo della velocità orbitale (corretta per l'inclinazione dell'orbita rispetto alla linea di vista) è costante e vale v = 1783 km/s. L'orbita viene completata in T = 20.2 anni. Ricavate la massa del buco nero del centro galattico in masse solari.

Soluzione

Poiché l'orbita è circolare, il modulo della velocità tangenziale **V** è costante e detto **R** il raggio dell'orbita della stella vale la relazione:

$$2\,\pi\,R = V \cdot T$$

da cui ricaviamo:

$$R = \frac{V\ \cdot T}{2\,\pi} = \frac{1783\,\frac{km}{s} \cdot 20.2\,anni}{2\,\pi} \simeq \frac{1783\ \cdot\ 10^3\,\frac{m}{s} \cdot 6.37\ \cdot\ 10^8\,s}{2\,\pi} \simeq 1.81\ \cdot\ 10^{14}\,m$$

Poiché la stella è in orbita attorno al buco nero, il modulo della sua velocità deve essere pari alla prima velocità cosmica. Quindi dette **M** la massa del buco nero e $\mathbf{M}_\odot$ la massa del Sole si ha:

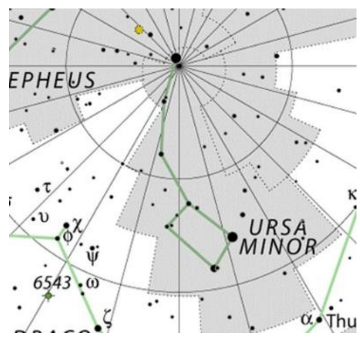
$$V = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$$

$$M = \frac{V^2 \cdot R}{G} \simeq \frac{3.179 \cdot 10^{12} \, \frac{m^2}{s^2} \cdot 1.81 \cdot 10^{14} \, m}{6.674 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}} \simeq 8.62 \cdot 10^{36} \, kg \simeq 4.33 \cdot 10^6 \, \mathrm{M}_\odot$$

4. Il navigatore incauto

Un velista armato solo di una bussola e di un sestante, in grado di misurare l'altezza degli astri con una precisione di 1', decide di effettuare una traversata notturna. Salpa in serata da una località di latitudine nota con l'intento di approdare prima dell'alba su un isolotto posto alla stessa latitudine della località di partenza, assicurandosi di navigare a latitudine costante grazie al controllo continuo dell'altezza sull'orizzonte della stella polare (α = 02h 31m 48s, δ_= +89° 15' 51"). Il velista suppone incautamente che la stella polare coincida con il polo nord celeste: a quale distanza massima dal punto previsto di approdo rischia di arrivare? Considerate solo lo spostamento in latitudine.

Soluzione



La differenza $\boldsymbol{\Delta\delta}$ di declinazione tra la stella polare (α UMi) e il polo nord celeste è pari a:

$$\Delta\delta = 90° - 89° \, 15' \, 51'' = 44' \, 09''$$

Quindi la stella polare non coincide con il polo nord celeste e, a causa della rotazione terrestre, la sua altezza sull'orizzonte cambia con il trascorrere del tempo e la osserviamo percorrere un cerchio di raggio Δδ centrato sul polo nord celeste.
Il velista, assumendo che la latitudine sia pari all'altezza sull'orizzonte della stella polare, può sbagliare quindi di ben 44' 09" in eccesso (quando la stella polare si trova in culminazione superiore) o di 44' 09" in difetto (quando la stella polare si trova in culminazione inferiore).
Detto $\mathbf{R_T}$ il raggio della Terra e **X** la lunghezza dell'arco di meridiano sotteso da un angolo di 44' 09", vale la relazione:

$$360° : 2\,\pi\, R_T = 44' \, 09'' : X$$

da cui:

$$X = \frac{44' \, 09''}{360°} \cdot 2\,\pi\, R_T \simeq \frac{0°.7358}{360°} \cdot 2\,\pi \cdot 6378 \, km \simeq 81.91 \, km$$

Il velista, procedendo con l'ipotesi che la stella polare coincida con il polo nord celeste, rischia di mancare l'approdo di quasi 82 km, sia in direzione nord sia in direzione sud.

5. Penombra, solo penombra

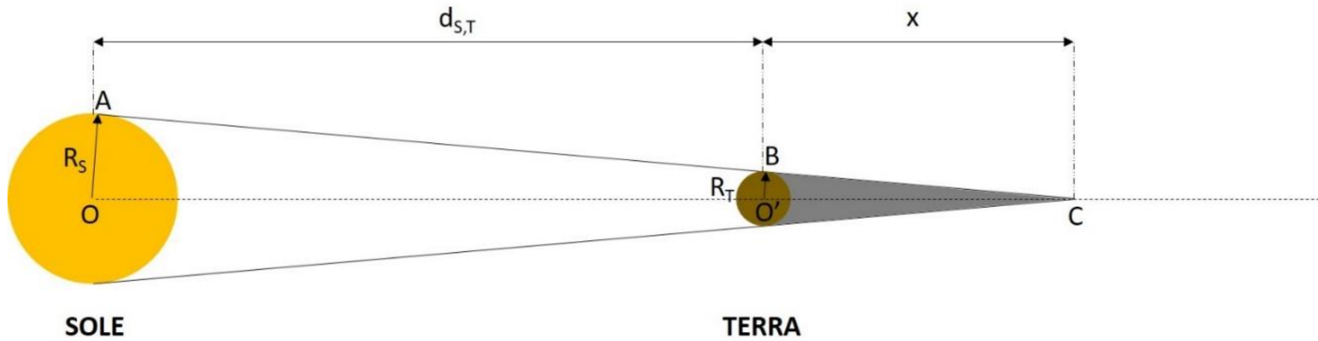
A causa della luce che riceve dal Sole, la Terra proietta nello spazio un cono d'ombra, dall'interno del quale non è possibile osservare il Sole.

1. A quale distanza minima dalla Terra dovrebbe trovarsi la Luna affinché risulti interamente all'esterno del cono d'ombra della Terra?
2. A tale minima distanza, assumendo che l'orbita della Luna sia stabile, quale sarebbe il suo periodo di rivoluzione?

Trascurate l'inclinazione dell'orbita della Luna rispetto all'eclittica e considerate le orbite della Terra e della Luna circolari.

Soluzione

1. Si consideri lo schema geometrico riportato nella figura sottostante, che mostra il cono d'ombra che la Terra proietta nello spazio a seguito della luce che riceve dal Sole. Affinché la Luna si trovi completamente al di fuori del cono d'ombra della Terra, essa deve trovarsi interamente oltre il punto C, vertice del cono d'ombra, ovvero a una distanza dal centro della Terra **O'** superiore alla distanza indicata con "**x**".



Nella figura i triangoli **CBO'** e **CAO** sono entrambi rettangoli, con l'angolo retto rispettivamente nei vertici **B** e **A** in cui il raggio terrestre $\mathbf{R_T}$ e il raggio solare $\mathbf{R_S}$ sono perpendicolari al segmento **CA**, che, per costruzione, è tangente sia alla Terra sia al Sole. Questi due triangoli, avendo in comune l'angolo in C, sono simili. Vale dunque la seguente proporzione:

$$\overline{\mathrm{CO'}} : \overline{\mathrm{CO}} = \overline{\mathrm{O'B}} : \overline{\mathrm{OA}}$$

Ovvero, detta $\mathbf{d_{S,T}}$ la distanza media Terra-Sole:

$$\mathrm{x} : \left(\mathrm{x} + \mathrm{d_{S,T}}\right) = \mathrm{R_T} : \mathrm{R_S}$$

da cui si ricava la seguente equazione:

$$\frac{\mathrm{R_S}}{\mathrm{R_T}} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x} + \mathrm{d_{S,T}}$$

e si ottiene infine il valore di x:

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{d_{S,T}} \cdot \mathrm{R_T}}{\mathrm{R_S} - \mathrm{R_T}} \simeq \frac{149.6 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot 6378 \text{ km}}{6.955 \cdot 10^5 \text{ km} - 6378 \text{ km}} \simeq 1.385 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Se però poniamo il centro della Luna alla distanza x, una piccola parte della faccia della Luna rivolta verso Terra e Sole sarà ancora all'interno del cono d'ombra della Terra. Affinché la Luna sia completamente al di fuori del cono d'ombra della Terra, detto $\mathbf{R_L}$ il suo raggio, il suo centro dovrebbe trovarsi a una distanza **A** pari a:

$$A = x + R_L \simeq 1.385 \cdot 10^6\, km + 1738\, km \simeq 1.386 \cdot 10^6 \text{ km} = 1.386 \cdot 10^9 \text{ m}$$

La Luna dovrebbe quindi trovarsi a una distanza minima che è circa un milione di km maggiore di quella media attuale.

2. Il rapporto tra ***A*** e la distanza attuale **a** vale:

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{a}} \simeq \frac{1.386 \cdot 10^6 \text{km}}{384.4 \cdot 10^3 \text{ km}} \simeq 3.606$$

Inserendo questo fattore nella III Legge di Keplero, ricaviamo il nuovo periodo di rivoluzione semplicemente eguagliando il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore e il quadrato del periodo nella situazione attuale (**a** e **T**) e in quella del problema (**A** e **P**):

$$\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{T}^2} = \frac{\mathrm{A}^3}{\mathrm{P}^2}$$

Si ricava quindi:

$$\mathrm{P} = \mathrm{T}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{a}}\right)^3} \simeq \mathrm{T} \cdot \sqrt{3.606^3} \simeq \mathrm{T} \cdot 6.848 \simeq 187.1 \text{ giorni} \simeq 1.617 \cdot 10^7\, s$$

Dette $\mathbf{M_T}$ e $\mathbf{M_L}$ le masse della Terra e della Luna, allo stesso valore, entro una differenza pari allo 0.2% dovuta alla precisione con cui sono indicate le varie grandezza, si può arrivare dalla III Legge di Keplero generalizzata:

$$P = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\, A^3}{G\,(\boldsymbol{M_T} + \boldsymbol{M_L})}} \simeq \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot 2.663 \cdot 10^{27}}{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot s^2} \cdot 6.045 \cdot 10^{24}\, kg}} \simeq 1.614 \cdot 10^7 s$$

Nota: la Luna si allontana dalla Terra, ma si può dimostrare che non arriverà mai alla distanza calcolata nel problema. Infatti, quando si troverà a circa 560000 km dalla Terra smetterà di allontanarsi e il periodo di rivoluzione della Luna coinciderà con quello di rotazione terrestre e saranno entrambi pari a circa 48 giorni attuali.