



XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia
Corso di preparazione alla Gara Interregionale
Categoria Junior 2 – Lezione 2

Problema 1

Utilizzando le proprietà dei logaritmi in base 10 determinare:

$$a) \quad \log 10 = ? \quad \log 1000 = ? \quad \log 1 = ? \quad \log (a \cdot b) = ? \quad \log \frac{a}{b} = ?$$

$$\log (a)^3 = ? \quad \log 10^6 = ? \quad \log \sqrt{10} = ?$$

$$b) \quad \sqrt[4.7]{36.54} = x$$

Soluzione

$$a) \quad \log 10 = 1 \quad \log 1000 = 3 \quad \log 1 = 0 \quad \log (a \cdot b) = \log a + \log b \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log (a)^3 = 3 \log a \quad \log 10^6 = 6 \quad \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \log 10 = 0.5$$

$$b) \quad \sqrt[4.7]{36.54} = x$$

Consideriamo il logaritmo di ambo i membri: $\frac{1}{4.7} \log 36.54 = \log x$

da cui: $0.3325 = \log x$

e passando agli esponenziali: $x = 10^{0.3325} = 2.150$

Problema 2

Completare la seguente tabella:

Nome	m	π (")	distanza (pc)	distanza (al)	M
α Cen A	-0.01	0.747			
α CMa (= Sirio)	-1.43		2.63		
61 Cyg A	5.21			11.4	
α Aql (= Altair)		0.194			2.21

Soluzione

Le relazioni che legano tra di loro le quantità in tabella sono:

$$\frac{1}{\pi''} = d(\text{pc}) \quad d(\text{al}) \simeq 3.2616 d(\text{pc}) \quad M = m + 5 - 5 \log d(\text{pc})$$

Nome	m	π (")	distanza (pc)	distanza (al)	M
α Cen A	-0.01	0.747	1.34	4.37	4.35
α CMa (= Sirio)	-1.43	0.380	2.63	8.58	1.47
61 Cyg A	5.21	0.286	3.50	11.4	7.49
α Aql (= Altair)	0.77	0.194	5.16	16.8	2.21

Problema 3

La stella α Cen A ha magnitudine apparente $m_v = -0.01$ e parallasse $\pi = 0''.747$. Calcolate la sua distanza, in pc e in anni luce, e la sua magnitudine assoluta M_v .

Soluzione

Dalla parallasse π di α Cen A ricaviamo la sua distanza in parsec e in anni luce:

$$d(\alpha \text{ Cen A}) = \frac{1}{0''.747} \simeq 1.34 \text{ pc} \simeq 4.37 \text{ anni luce}$$

La magnitudine assoluta vale quindi:

$$M_v(\alpha \text{ Cen A}) = m(\alpha \text{ Cen A}) + 5 - 5 \log d(\alpha \text{ Cen A}) \simeq -0.01 + 5 - 0.64 = 4.35$$

Problema 4

Verificate la correttezza del valore della magnitudine assoluta del Sole (M_{\odot}) riportato nella Tabella dei dati, sapendo che dalla Terra la magnitudine apparente del Sole è: $m_{\odot} = -26.74$

Soluzione

Utilizzando i dati nella Tabella esprimiamo la distanza del Sole in parsec:

$$1 \text{ UA} = \frac{1}{206265} \text{ parsec}$$

La magnitudine assoluta del Sole vale quindi:

$$M_{\odot} = -26.74 + 5 - 5 \log\left(\frac{1}{206265}\right) \simeq 4.83$$

Problema 5

La magnitudine apparente del Sole visto dalla Terra è $m_{\odot} = -26.74$. Si calcoli la magnitudine apparente media del Sole visto da: Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno.

Soluzione

La relazione che lega la magnitudine apparente del Sole m_{\odot} a quella assoluta M_{\odot} è:

$$m_{\odot} = M_{\odot} - 5 + 5 \log d$$

poiché $1 \text{ km} \simeq \frac{1}{30857 \cdot 10^9} \text{ pc}$, dai dati nella Tabella calcoliamo le distanze medie dei pianeti dal Sole in parsec:

$$d_{\text{ME}} \simeq 1.877 \cdot 10^{-6} \text{ pc}$$

$$d_{\text{VE}} \simeq 3.507 \cdot 10^{-6} \text{ pc} \quad d_{\text{MA}} \simeq 7.386 \cdot 10^{-6} \text{ pc} \quad d_{\text{GI}} \simeq 25.23 \cdot 10^{-6} \text{ pc} \quad d_{\text{SA}} \simeq 46.25 \cdot 10^{-6} \text{ pc}$$

La magnitudine apparente del Sole visto dai pianeti vale quindi:

$$m_{\text{ME}\odot} \simeq -28.80$$

$$m_{\text{VE}\odot} \simeq -27.45 \quad m_{\text{MA}\odot} \simeq -25.83 \quad m_{\text{GI}\odot} \simeq -23.16 \quad m_{\text{SA}\odot} \simeq -21.84$$

Problema 6

Calcolate la magnitudine assoluta media della Luna Piena, sapendo che la sua magnitudine apparente media vale $m_{Luna} = -12.74$

Soluzione

La relazione che lega la magnitudine assoluta della Luna M_{Luna} a quella apparente m_{Luna} è:

$$M_{Luna} = m_{Luna} + 5 - 5 \log d$$

poiché $1 \text{ pc} = 30857 \cdot 10^9 \text{ km}$, la distanza media della Luna dalla Terra d_{T-L} vale:

$$d_{T-L} \simeq \frac{384.4 \cdot 10^3 \text{ km}}{30857 \cdot 10^9 \frac{\text{km}}{\text{pc}}} \simeq 1.246 \cdot 10^{-8} \text{ pc}$$

La magnitudine assoluta della Luna vale quindi:

$$M_{Luna} = -12.74 + 5 - 5 \log (1.246 \cdot 10^{-8}) \simeq 31.78$$

Problema 7

Da una stella γ riceviamo sulla Terra un flusso luminoso 8560 volte minore rispetto a quello di una stella β . Se la magnitudine della stella β è $m_\beta = 2.86$, calcolare la magnitudine della stella γ .

Soluzione

La differenza di magnitudine tra le due stelle è data dalla relazione:

$$m_\gamma - m_\beta = -2.5 \log \frac{F_\gamma}{F_\beta} = -2.5 \log \frac{1}{8560} \simeq 9.83$$

La magnitudine della stella γ vale quindi:

$$m_\gamma = m_\beta + 9.83 \simeq 12.69$$

Problema 8

Se potessero essere osservate individualmente, le componenti di una binaria spettroscopica avrebbero magnitudini $m_1 = 3.74$ e $m_2 = 4.15$. Quanto vale la magnitudine apparente totale della binaria spettroscopica?

Soluzione

La magnitudine totale di due o più stelle NON è la somma delle singole magnitudini, ma la risposta del rivelatore (ad es. il nostro occhio) alla somma dei flussi delle singole stelle.

Si può dimostrare che per calcolare la magnitudine totale m_{1+2} di due stelle possiamo usare una delle seguenti relazioni:

$$m_{1+2} = -2.5 \log (10^{-0.4 m_1} + 10^{-0.4 m_2})$$

$$m_{1+2} = m_2 - 2.5 \log (10^{0.4 (m_2 - m_1)} + 1)$$

ottenendo:

$$m_{1+2} = -2.5 \log (10^{-0.4 m_1} + 10^{-0.4 m_2}) = -2.5 \log (10^{-1.496} + 10^{-1.66}) \simeq 3.17$$

$$m_{1+2} = m_2 - 2.5 \log (10^{0.4 (m_2 - m_1)} + 1) = 4.15 - 2.5 \log (10^{0.4 (4.15 - 3.74)} + 1) \simeq 3.17$$

Problema 9

La magnitudine apparente totale di un sistema triplo è $m_T = 2.95$. Due delle componenti hanno magnitudini $m_1 = 3.75$ e $m_2 = 4.15$. Determinare la magnitudine apparente della terza componente.

Soluzione

La magnitudine totale $m_T = m_{1+2+3}$ è la risposta del rivelatore alla somma dei flussi delle singole stelle.

Si dimostra che vale la relazione:

$$m_T = m_{1+2+3} = -2.5 \log (10^{-0.4 m_1} + 10^{-0.4 m_2} + 10^{-0.4 m_3})$$

Quindi nel caso in esame:

$$2.95 = -2.5 \log (10^{-1.50} + 10^{-1.66} + 10^{-0.4 m_3})$$

$$-1.18 = \log (10^{-1.50} + 10^{-1.66} + 10^{-0.4 m_3})$$

e considerando gli esponenziali di ambo i membri:

$$0.0661 \simeq 0.0316 + 0.0219 + 10^{-0.4 m_3} \quad \text{da cui: } 10^{-0.4 m_3} \simeq 0.0126$$

e considerando il logaritmo di ambo i membri:

$$-0.4 m_3 \simeq -1.90 \quad \text{da cui infine: } m_3 \simeq 4.75$$

Problema 10

Si calcoli la differenza di magnitudine tra la Luna Piena osservata al perigeo e la Luna Piena osservata all'apogeo.

Soluzione

Trascurando la differenza del flusso solare incidente nei due casi (la differenza tra la distanza della Luna al perigeo e all'apogeo è circa $2.9 \cdot 10^{-4}$ la distanza della Terra dal Sole) il flusso riflesso dalla Luna, a parità di condizioni osservative, dipende unicamente dalla superficie visibile ed è ad essa proporzionale.

Dette d_{ALuna} e d_{PLuna} le distanze della Luna all'apogeo e al perigeo, i raggi apparenti della Luna all'apogeo R_{ALuna} e al perigeo R_{PLuna} sono dati da:

$$R_{ALuna} = \sin^{-1} \left(\frac{R_{Luna}}{d_{ALuna}} \right) \simeq \sin^{-1} \left(\frac{1738}{405.7 \cdot 10^3} \right) \simeq 14'.73$$

$$R_{PLuna} = \sin^{-1} \left(\frac{R_{Luna}}{d_{PLuna}} \right) \simeq \sin^{-1} \left(\frac{1738}{363.1 \cdot 10^3} \right) \simeq 16'.46$$

Quindi l'area del disco lunare all'apogeo A_{ALuna} e al perigeo A_{PLuna} vale:

$$A_{ALuna} = \pi R_{ALuna}^2 \simeq 681.6 \text{ arcmin}^2 \quad A_{PLuna} = \pi R_{PLuna}^2 \simeq 851.2 \text{ arcmin}^2$$

La differenza di magnitudine Δm vale quindi:

$$\Delta m = m_p - m_A - 2.5 \log \frac{F_P}{F_A} \simeq -2.5 \log \frac{851.2 \text{ arcmin}^2}{681.6 \text{ arcmin}^2} \simeq -2.5 \log 1.249 \simeq -0.24$$

In alternativa, considerando che il flusso diminuisce con l'inverso del quadrato della distanza si ha:

$$\Delta m = m_p - m_A = -2.5 \log \frac{F_P}{F_A} = -2.5 \log \frac{d_{ALuna}^2}{d_{PLuna}^2} = -5 \log \frac{d_{ALuna}}{d_{PLuna}} \simeq -5 \log 1.117 \simeq -0.24$$

Problema 11

Sirio ($= \alpha$ CMa; $m = -1.43$) si trova a una distanza dal Sole $d = 8.58$ anni luce. Quanto varrebbe la sua magnitudine apparente se si trovasse a una distanza $D = 85.8$ anni luce? A partire da quale distanza Sirio non sarebbe più visibile a occhio nudo dalla Terra? Si esprima il risultato in pc e in anni luce, trascurando gli effetti dovuti all'atmosfera.

Soluzione

La distanza della Terra dal Sole è ovviamente trascurabile rispetto alla distanza Sole-Sirio. Detta allora m_1 la magnitudine di Sirio con $d = 8.58$ anni luce e m_2 la magnitudine con $D = 85.8$ anni luce, vale la relazione:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2}$$

ed essendo: $F_1 = \frac{L_{\text{Sirio}}}{4 \pi d^2}$ e $F_2 = \frac{L_{\text{Sirio}}}{4 \pi D^2}$, si ha:

$$-1.43 - m_2 = -2.5 \log \frac{D^2}{d^2} = -5 \log 10 = -5 \quad \text{da cui ricaviamo } m_2 = 3.57$$

Generalmente si assume $m = 6$ come limite di visibilità a occhio nudo nelle migliori condizioni osservative, avremo quindi:

$$-7.43 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2} = -2.5 \log \frac{d_2^2}{d_1^2} = -5 \log \frac{d_2}{d_1}$$

$$1.49 = \log \frac{d_2}{d_1} \quad \text{e quindi: } \frac{d_2}{d_1} = 30.9$$

Sirio non sarebbe più visibile a occhio nudo se si trovasse a una distanza d_2 oltre 30.9 volte maggiore di quella vera, ovvero per:

$$d_2 > 30.9 \cdot 2.63 \simeq 81.3 \text{ pc} \simeq 265 \text{ anni luce}$$

Problema 12

La magnitudine apparente di Sirio (= α CMa) vale $m = -1.43$. Calcolare la sua magnitudine apparente se: a) il suo raggio si dimezzasse; b) la temperatura della sua fotosfera si dimezzasse. Quale variazione produrrebbe un effetto maggiore?

Soluzione

Detti R il raggio e T la temperatura della fotosfera, la luminosità L di una stella vale:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Detta d la distanza dall'osservatore, la differenza di magnitudine tra due stelle è data dalla relazione:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = -2.5 \log \left(\frac{R_1^2 \cdot T_1^4}{d_1^2} \right) \left(\frac{d_2^2}{R_2^2 \cdot T_2^4} \right)$$

Se il raggio di Sirio si dimezza nella precedente relazione possiamo porre:

$$d_1 = d_2, \quad T_1 = T_2, \quad R_1 = 2 R_2$$

e quindi avremo:

$$-1.43 - m_2 = -2.5 \log 4 \quad \text{da cui si ricava } m_2 = 0.08$$

Se la temperatura di Sirio si dimezza nella precedente relazione possiamo porre:

$$d_1 = d_2, \quad T_1 = 2 T_2, \quad R_1 = R_2$$

e quindi avremo:

$$-1.43 - m_2 = -2.5 \log 16 \quad \text{da cui si ricava } m_2 = 1.58$$

Una variazione di temperatura comporta quindi una variazione di magnitudine maggiore rispetto a un'identica variazione del raggio. Ciò perché L dipende da R^2 e da T^4 .

Problema 13

La magnitudine assoluta di una stella nella galassia di Andromeda, la cui distanza è di $2.25 \cdot 10^6$ anni luce, è $M = -5.00$. Calcolate la magnitudine apparente della stella e il modulo di distanza della galassia. Se questa stella esplodesse come supernova diventando 10^5 volte più luminosa, quanto varrebbero la sua magnitudine apparente e quella assoluta?

Soluzione

Poiché $2.25 \cdot 10^6$ anni luce $\simeq 690 \cdot 10^3$ parsec, dalla relazione che lega magnitudine assoluta M e apparente m della stella ricaviamo:

$$m = M - 5 + 5 \log d \simeq -5.00 - 5 + 5 \log (690 \cdot 10^3) \simeq 19.2$$

Il modulo di distanza della galassia coincide con ottima approssimazione con quello della stella:

$$m - M = 19.2 + 5.00 = 24.2$$

La magnitudine assoluta M_S e apparente m_S della supernova si ricavano considerando che:

$$M_S - M = -2.5 \log \left(\frac{F_{\text{supernova}}}{F_{\text{stella}}} \right) = -2.5 \log (10^5) = -12.5$$

$$m_S - m = -2.5 \log \left(\frac{F_{\text{supernova}}}{F_{\text{stella}}} \right) = -2.5 \log (10^5) = -12.5$$

Da cui

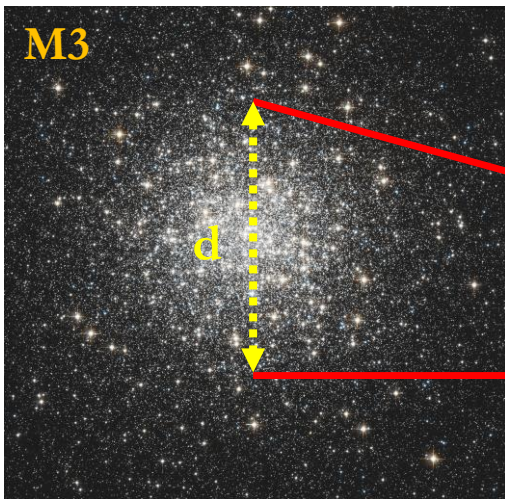
$$M_S = M - 12.5 = -17.5$$

$$m_S = m - 12.5 = 6.7$$

Problema 14

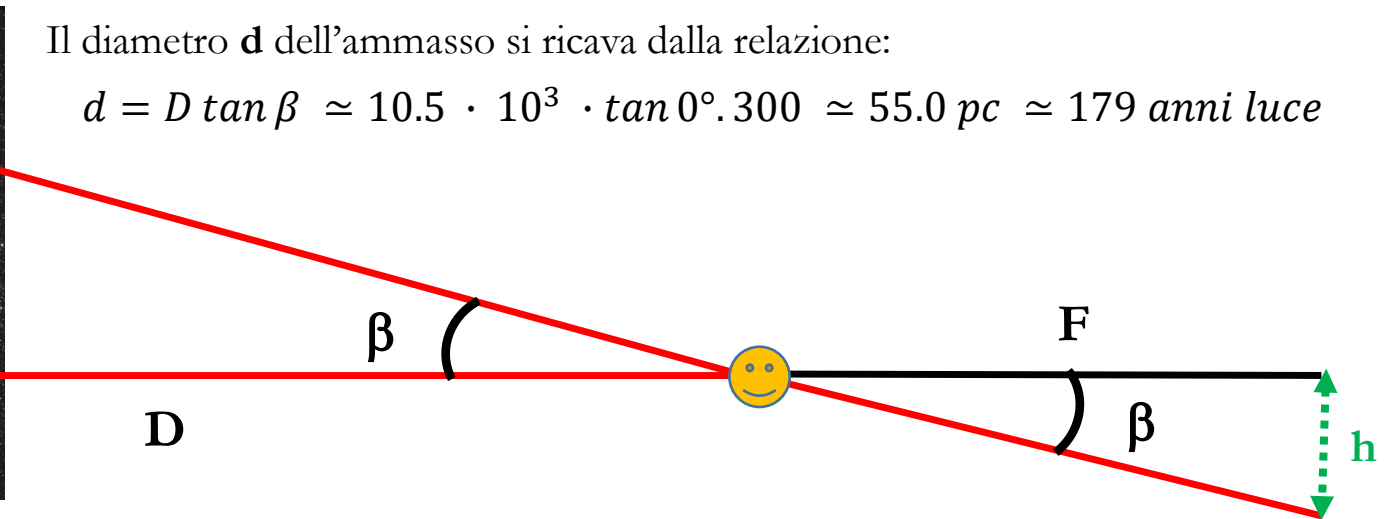
L'ammasso globulare M3 dista dal Sole $D = 10.5$ kpc e ha un diametro apparente $\beta = 18.0'$. Stimare il diametro dell'ammasso in anni luce. Se osservate l'ammasso con un telescopio con apertura $D = 1$ m e rapporto focale $f/10$, quanto varranno le sue dimensioni lineari sul piano focale?

Soluzione



Il diametro d dell'ammasso si ricava dalla relazione:

$$d = D \tan \beta \approx 10.5 \cdot 10^3 \cdot \tan 0^\circ.300 \approx 55.0 \text{ pc} \approx 179 \text{ anni luce}$$



Poiché il telescopio ha un'apertura di 1 m e un rapporto focale $f/10$ la sua lunghezza focale F è di 10 m

Detta h la dimensione lineare dell'immagine dell'ammasso sul piano focale del telescopio si ha:

$$h = F \cdot \tan \beta \approx 10 \text{ m} \cdot \tan 0^\circ.300 \approx 0.052 \text{ m} = 5.2 \text{ cm}$$

Problema 15

Un telescopio riflettore ha uno specchio con diametro $D = 15$ cm e un rapporto di apertura $f/10$. Per osservare visualmente con questo strumento abbiamo acquistato un set di tre oculari che hanno tutti un FoV (campo di vista) di 60° e lunghezza focale, rispettivamente, di: $f_1 = 4$ mm, $f_2 = 10$ mm e $f_3 = 20$ mm. Quanto vale la focale del telescopio? Quanti ingrandimenti e che FoV otterremo utilizzando i tre oculari? Con quale oculare potremo osservare l'intero disco lunare?

Soluzione

Il rapporto di apertura indica quante volte la focale del telescopio è maggiore dell'apertura. Poiché il telescopio ha uno specchio (ovvero un'apertura) con diametro $D = 15$ cm = 150 mm, la focale F del telescopio è:

$$F = D \cdot 10 = 150 \text{ cm} = 1500 \text{ mm}$$

L'ingrandimento I (che non è una caratteristica del telescopio) è dato dalla relazione: $I = \frac{F_{\text{telescopio}}}{f_{\text{oculare}}}$

Per ogni ingrandimento così ottenuto vale la relazione: $FoV_{\text{telescopio}} = \frac{FoV_{\text{oculare}}}{I}$

Gli ingrandimenti e i corrispondenti FoV del telescopio per i tre oculari varranno quindi:

$$I_{4\text{mm}} = \frac{F_{\text{telescopio}}}{f_{\text{oculare}}} = \frac{1500 \text{ mm}}{4 \text{ mm}} = 375$$

$$FoV_{4\text{mm}} = \frac{FoV_{\text{oculare}}}{I_{4\text{mm}}} = \frac{60^\circ}{375} = 0^\circ.16 = 9'.6$$

$$I_{10\text{mm}} = \frac{F_{\text{telescopio}}}{f_{\text{oculare}}} = \frac{1500 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 150$$

$$FoV_{10\text{mm}} = \frac{FoV_{\text{oculare}}}{I_{10\text{mm}}} = \frac{60^\circ}{150} = 0^\circ.4 = 24'$$

$$I_{20\text{mm}} = \frac{F_{\text{telescopio}}}{f_{\text{oculare}}} = \frac{1500 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 75$$

$$FoV_{20\text{mm}} = \frac{FoV_{\text{oculare}}}{I_{20\text{mm}}} = \frac{60^\circ}{75} = 0^\circ.8 = 48'$$

Il valore medio del diametro apparente D della Luna è dato dalla relazione:

$$D_{\text{Luna}} = 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{R_{\text{Luna}}}{d_{\text{Luna}}} \right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{1738}{384.4 \cdot 10^3} \right) \simeq 31'.09$$

Quindi solo con il terzo oculare potremo osservare l'intero disco lunare.

Problema 16

Si considerino due stelle di magnitudine $m_1 = 3$ e $m_2 = 10$. Con un telescopio con apertura $D_1 = 20$ cm viene scattata una foto della prima stella, con un tempo di esposizione di 3 secondi. Volendo scattare una foto alla seconda stella, quanto dovrà essere il tempo di esposizione se si vuole che questa appaia, sulla foto, brillante come la prima? Se invece si volesse mantenere lo stesso tempo di esposizione, di quanto dovrebbe aumentare il diametro dell'obiettivo?

Soluzione

La differenza di magnitudine tra le due stelle è:

$$m_1 - m_2 = -7 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2}$$

Quindi il rapporto dei flussi vale:

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{2.8} \simeq 631$$

Se vogliamo che la seconda stella risulti luminosa come la prima dobbiamo ricevere lo stesso flusso. A parità di telescopio occorrerà aumentare il tempo di esposizione di un fattore pari al rapporto tra i flussi e quindi:

$$T_1 = 3 \text{ s} \quad T_2 \simeq 631 T_1 \simeq 1893 \text{ s}$$

Se invece si vuole cambiare il diametro dell'obiettivo a parità di tempo di esposizione, si deve aumentare l'area del telescopio di un fattore pari rapporto dei flussi e poiché l'area di un telescopio è proporzionale al quadrato del raggio ed essendo $R = \frac{D}{2}$ si avrà:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{2 D_2}{2 D_1}\right)^2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \simeq 631 \quad \text{da cui si ricava: } D_2 \simeq \sqrt{631} D_1 \simeq 25.1 D_1$$

Quindi occorrerebbe un telescopio con apertura: $D_2 \simeq 25.1 D_1 \simeq 502 \text{ cm}$

Problema 17

Calcolare quale dovrebbe essere l'apertura minima di un radiotelescopio che osserva alla frequenza di 3GHz, per risolvere due radiosorgenti distanti angularmente 6'

Soluzione

La lunghezza d'onda della radiazione osservata è pari a:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \simeq \frac{299792 \cdot 10^3 \frac{m}{s}}{3 \cdot 10^9 \text{ Hz}} \simeq 0.1 \text{ m}$$

La separazione tra le due radiosorgenti vale $\alpha = 6' = 360''$

Quindi il diametro minimo D_T del radiotelescopio in grado di risolverle è:

$$D_T = 1.22 \frac{\lambda}{\alpha(\text{rad})} = 1.22 \frac{\lambda}{\alpha''} 206265''$$
$$D_T = 1.22 \frac{0.1 \text{ m}}{360''} 206265'' \simeq 70 \text{ m}$$