XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Gara Interregionale

Categoria Junior 2 – Lezione 1

Problema 1

Proprietà delle potenze e cifre significative per somme, prodotti e quozienti

$$10^3 \cdot 10^5 = 10^8$$

$$(10^3)^3 = 10^9$$

$10^8 + 10^2 \simeq 10^8$ (in quanto 10^2 è trascurabile rispetto a 10^8)

$$\frac{10^{20}}{10^{-11} \cdot 10^{24}} = 10^{20-(-11+24)} = 10^7$$

$$25.764 + 113.22 = 138.98$$

$$2.347 + 3.15 \simeq 5.50$$

$$3.2576 \cdot 10^3 + 1.1322 \cdot 10^2 = 3.3708 \cdot 10^3$$

$$3.567 \cdot 10^3 \cdot 2.56 \cdot 10^4 \simeq 9.13 \cdot 10^7$$

$$\frac{25.764}{113.22} \simeq 0.22756 = 2.2756 \cdot 10^{-1}$$

$$\frac{25.764}{13.22} \simeq 1.949$$

$$\frac{3.274 \cdot 10^5}{2.22 \cdot 10^2} \simeq 1.47 \cdot 10^3$$

Problema 2

Considerate un'ellisse con semiassi **a** = 7.02 UA e **b** = 5.52 UA. Calcolate l'eccentricità dell'ellisse e la distanza tra i due fuochi.

Soluzione

$$\mathbf{e} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{30.5\ UA^2}{49.3\ UA^2}\right)} = \sqrt{1 - 0.619} = 0.617$$

$$\mathbf{D = 2c} = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{49.3\ UA^2 - 30.5\ UA^2} = 8.67\ UA$$

Problema 3

Calcolate la velocità orbitale media della Terra intorno al Sole in km/s. Assumete l'orbita circolare con raggio pari al semiasse maggiore. Trascurate la massa della Terra rispetto a quella del Sole.

Soluzione:

Per calcolare la velocità orbitale media della Terra $\boldsymbol{v_{mT}}$ utilizziamo la formula:

$$v_{mT} = \frac{s}{t} = \frac{O_T\,(lunghezza\ dell'orbita\ della\ Terra)}{T_T\,(periodo\ di\ rivoluzione\ della\ Terra)}$$

Detto $\boldsymbol{a_T}$ il semiasse maggiore dell'orbita, calcoliamo la lunghezza $\boldsymbol{O_T}$ dell'orbita della Terra:

$$O_T = 2\,\pi\,a_T \simeq 2\,\pi \cdot 149.6 \cdot 10^6\ km \simeq 940.0 \cdot 10^6\ km$$

Calcoliamo il periodo di rivoluzione della Terra, o anno siderale, T_T in secondi:

$$T_T \simeq 365.26\ giorni \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \simeq 31.558 \cdot 10^6\ s$$

quindi:

$$v_{mT} = \frac{s}{t} = \frac{O_T}{T_T} \simeq \frac{940.0 \cdot 10^6\ km}{31.558 \cdot 10^6\ s} \simeq 29.79\ \frac{km}{s}$$

Problema 4

Un asteroide dista dal Sole 2.978 UA al perielio e 9.022 UA all'afelio. Determinate il semiasse maggiore, in UA e in km, e l'eccentricità dell'orbita. Calcolate il periodo di rivoluzione dell'asteroide. Stimate di quanto cambierebbe il periodo se l'eccentricità dell'orbita si dimezzasse.

Soluzione:

Dette $\mathbf{D_a}$ e $\mathbf{D_p}$ le distanze all'afelio e al perielio, il semiasse maggiore **a** dell'orbita dell'asteroide è dato da:

$$a = \frac{D_p + D_a}{2} = \frac{2.978\ UA + 9.022\ UA}{2} = 6.000\ UA \simeq 897.6 \cdot 10^6\ km$$

L'eccentricità **e** può essere calcolata dalla formula: $D_a = a\,(1+e)$,   da cui ricaviamo:

$$e = \frac{D_a}{a} - 1 = \frac{9.022\ UA}{6.000\ UA} - 1 \simeq 0.5037$$

Il periodo di rivoluzione **T** in anni si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{6.000^3} \simeq 14.70 \text{ anni}$$

Poiché nella formula del calcolo del periodo l'eccentricità non compare, segue che il periodo di rivoluzione non dipende dall'eccentricità dell'orbita, ma solo dal semiasse maggiore.

Problema 5

Può una cometa avere un periodo di rivoluzione di un anno e una distanza all'afelio maggiore di quella media di Marte? Se sì, ricavare il valore minimo dell'eccentricità dell'orbita.

Soluzione:

Il periodo di rivoluzione T della cometa è pari a un anno; per calcolare il semiasse maggiore a_{cometa} dell'orbita della cometa utilizziamo quindi la formula:

$$a_{cometa} = \sqrt[3]{T^2} = 1\ UA$$

Dai dati forniti nella Tabella vediamo che il semiasse maggiore dell'orbita di Marte vale:

$$a_{Marte} \simeq 1.523\ UA$$

Detta **e** l'eccentricità dell'orbita, la distanza di un corpo all'afelio è data dalla relazione:

$$D_{afelio} = a\ (1+e)$$

Quindi affinché la cometa abbia una distanza all'afelio maggiore di quella media di Marte deve essere:

$$a_{cometa}\ (1+e) = 1\ \mathrm{UA}\ (1+\mathrm{e}) > 1.523\ UA$$

da cui:

$$(1+e) > 1.523$$

e infine:

$$e\ > 1.523\ - 1$$

$$e\ > 0.523$$

Problema 6

L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore a = 7.143 UA e semiasse minore b = 2.635 UA. Dette V_A e V_P le velocità orbitali all'afelio e al perielio, si determini il periodo orbitale dell'asteroide e il valore del rapporto $\frac{V_A}{V_P}$

Soluzione:

Ricaviamo il periodo orbitale **T** in anni dell'asteroide dalla III legge di Keplero: $T = \sqrt{a^3}$

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{364.5} \simeq 19.09\ anni$$

Dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$V_A D_A = V_P D_P$$

quindi:

$$\frac{V_A}{V_P} = \frac{D_P}{D_A} = \frac{a\,(1-e)}{a\,(1+e)} = \frac{1-e}{1+e}$$

L'eccentricità **e** si ricava dalla formula: $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{6.943\ UA^2}{51.02\ UA^2}\right)} \simeq 0.9295$

Da cui otteniamo: $\frac{V_A}{V_P} = \frac{D_P}{D_A} = \frac{a\,(1-e)}{a\,(1+e)} = \frac{1-e}{1+e} \simeq 0.03654 = 3.654 \cdot 10^{-2}$

Notiamo che il rapporto delle velocità dipende unicamente dall'eccentricità dell'orbita.

Problema 7

Un satellite artificiale orbita attorno alla Terra su un'orbita ellittica con semiassi maggiore e minore: $\boldsymbol{a} = 15.22 \cdot 10^3\ km$ e $\boldsymbol{b} = 13.21 \cdot 10^3\ km$. Calcolate la distanza minima del satellite al perigeo e all'apogeo rispetto alla superficie della Terra e il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione

L'eccentricità **e** dell'orbita del satellite è data dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{174.5 \cdot 10^6\ km^2}{231.6 \cdot 10^6\ km^2}\right)} \simeq 0.4965$$

La distanza del satellite dal centro della Terra al perigeo $\mathbf{D_P}$ e all'apogeo $\mathbf{D_A}$ vale quindi:

$$D_P = a\,(1 - e) \simeq 7663\ \text{km} \qquad\qquad D_A = a\,(1 + e) \simeq 227.8\ \cdot 10^2\ \text{km}$$

La distanza minima di un satellite dalla superficie terrestre si ha quando un osservatore lo vede transitare allo zenith. Quindi per ottenere la distanza minima nei due casi ($\mathbf{H_P}$ e $\mathbf{H_A}$) basta sottrarre il raggio della Terra alle distanze all'afelio e al perielio:

$$H_P = D_p - R_T \simeq 1285\ km \qquad\qquad H_A = D_A - R_T \simeq 164.0\ \cdot 10^2\ km$$

Applicando la III legge di Keplero generalizzata e considerando che la massa del satellite è ovviamente trascurabile rispetto a quella della Terra, il periodo di rivoluzione **T** è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot\ a^3}{G\ \cdot\ M_T}} \simeq$$

$$\sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.526 \cdot 10^{21}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq \sqrt{3.493\ \cdot\ 10^8\ s^2} \simeq 1.869 \cdot\ 10^4\ s \simeq 311.5\ minuti\ \simeq 5\ h\ \ 12\ minuti$$

Problema 8

L'Asteroide 704 “Interamnia”, scoperto nel 1910, percorre intorno al Sole un’orbita stabile in prossimità dell’eclittica con eccentricità e = 0.151 e periodo T = 5.35 anni. Si dica se l'asteroide costituisce una minaccia per la Terra, stimando la sua distanza minima dal nostro pianeta. Si assuma per la Terra un’orbita circolare.

Soluzione:

Il semiasse maggiore **a** in UA dell’orbita di 704 Interamnia si trova applicando la III legge di Keplero: a^3 (UA) = T^2 (anni):

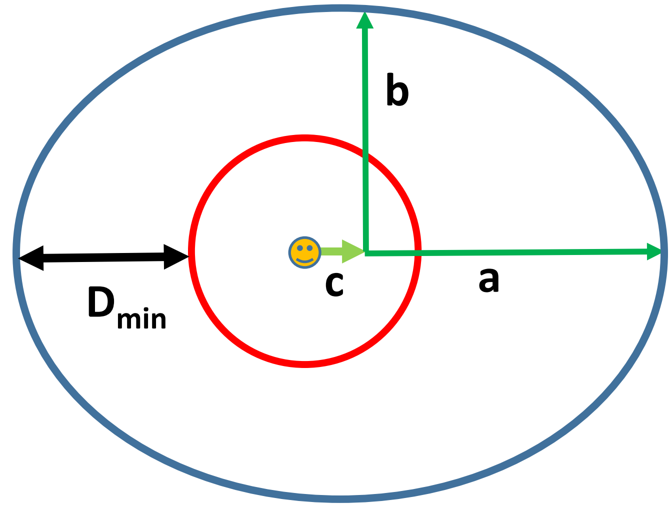
$$a = \sqrt[3]{5.35^2} \simeq 3.06\ UA$$

Il semiasse minore dell’orbita si ricava dalla relazione:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \simeq 3.06\ UA \cdot \sqrt{1 - 0.0228} \simeq 3.02\ UA$$

La posizione del Sole rispetto al centro dell’ellisse è data da:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \simeq \sqrt{3.06^2 - 3.02^2} \simeq 0.493\ UA$$



L’orbita dell’asteroide (sul piano dell’eclittica e stabile) si trova ben all’esterno di quella della Terra (vedere disegno qui sopra)

La distanza minima D_{min} dalla Terra è data dalla distanza di Interamnia dal Sole al perielio meno la distanza della Terra dal Sole:

$$D_{min} = D_p - 1\ UA = a\,(1 - e) - 1\ UA \simeq 3.06\ UA\,(1 - 0.151) - 1\ UA \simeq 1.60\ UA$$

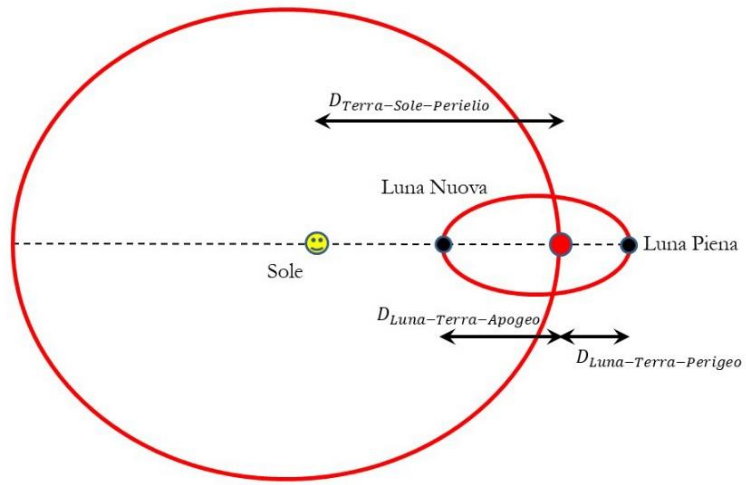
L’asteroide quindi non costituisce una minaccia per la Terra.

Problema 9

Calcolate, trascurando l'inclinazione dell'orbita lunare sull'eclittica, la distanza minima della Luna Piena e della Luna Nuova dal Sole. Per le eccentricità si assumano i valori: $e_L = 0.05490$ per l'orbita della Luna attorno alla Terra ed $e_T = 0.01671$ per l'orbita della Terra attorno al Sole.

Soluzione:

La Luna è Piena quando è opposta al Sole rispetto alla Terra: la sua distanza minima dal Sole si avrà quando la Terra è al perielio e la Luna Piena al perigeo (vedere il disegno a destra non in scala).



Quindi :

$$D_{\text{mimLunaPiena-Sole}} = D_{\text{TPerielio}} + D_{\text{LPerigeo}}$$

$$D_{\text{TPerielio}} = a_T\,(1 - e_T) \simeq 147.1 \cdot 10^6\ km$$

$$D_{\text{LPerigeo}} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$$

$$D_{\text{mimLunaPiena-Sole}} = D_{\text{TPerielio}} + D_{\text{LPerigeo}} \simeq 147.5 \cdot 10^6\ km$$

La Luna è Nuova quando si trova nella stessa direzione e dalla stessa parte del Sole rispetto alla Terra: la sua distanza minima dal Sole si avrà quando la Terra è al perielio e la Luna all'apogeo.

Quindi:

$$D_{\text{mimLunaNuova-Sole}} = D_{\text{TPerielio}} - D_{\text{LApogeo}}$$

$$D_{\text{LApogeo}} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 405.5 \cdot 10^3\ km$$

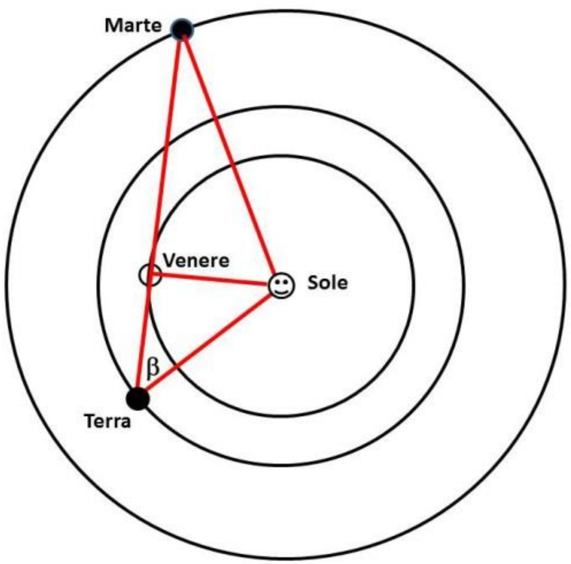
$$D_{\text{mimLunaNuova-Sole}} = D_{\text{TPerielio}} - D_{\text{LApogeo}} \simeq 146.7 \cdot 10^6\ km$$

Problema 10

Osservate una configurazione planetaria molto particolare, con Venere alla massima elongazione ovest e angolarmente vicinissimo (in congiunzione) con Marte. Calcolate la distanza Terra-Marte in quel momento, assumendo tutte le orbite circolari e trascurando le loro inclinazioni sull'eclittica.

Suggerimento: realizzate un disegno (in scala) che mostri l'orbita dei tre pianeti attorno al Sole. Collocate i pianeti come descritto nel testo del problema, assumendo che Venere e Marte siano così vicini da poter essere collocati sulla stessa retta.

Soluzione:



Quando Venere è a una massima elongazione, la retta Terra-Venere è tangente all'orbita di Venere. Con le approssimazioni usate possiamo assumere che Sole, Terra, Venere e Marte si trovino ai vertici di due triangoli rettangoli, con il lato Venere-Sole in comune. Detti **VT** la distanza Terra-Venere, **MV** la distanza Marte-Venere, **VS** la distanza Venere-Sole, **MS** la distanza Marte-Sole, **TS** la distanza Terra-Sole e **MT** la distanza Marte-Terra possiamo risolvere il problema, utilizzando i dati in Tabella, con il teorema di Pitagora

$$VT = \sqrt{TS^2 - VS^2} \simeq \sqrt{2.238 \cdot 10^{16}\ km^2 - 1.171 \cdot 10^{16}\ km^2} \simeq$$
$$\simeq 103.3 \cdot 10^6\ km$$

$$MV = \sqrt{MS^2 - VS^2} \simeq \sqrt{5.194 \cdot 10^{16}\ km^2 - 1.171 \cdot 10^{16}\ km^2} \simeq$$
$$\simeq 200.6 \cdot 10^6\ km$$

$$MT = VT + MV \simeq 103.3 \cdot 10^6\ km + 200.6 \cdot 10^6\ km \simeq 303.9 \cdot 10^6\ km$$

Problema 11

Giove ha una rotazione molto rapida. Un qualsiasi punto sul suo equatore ha una velocità tangenziale v = 12.57 km/s. A che altezza dalla superficie dovete porre un satellite artificiale in orbita equatoriale affinché esso risulti “Giove-stazionario”?.

Soluzione:

Detto **R** il raggio di Giove, la velocità tangenziale all’equatore $\mathbf{v_T}$ è legata al periodo di rotazione **T** dalla relazione:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v_T} \simeq \frac{4.492\ \cdot\ 10^5\ \mathrm{km}}{12.57\ \frac{km}{s}} \simeq 35730\ \mathrm{s}\ \simeq 9\mathrm{h}\ 55.6\mathrm{m}$$

Perché il satellite risulti “Giove-stazionario”, deve orbitare attorno a Giove con un periodo pari a **T**.

Dalla III Legge di Keplero generalizzata, assumendo l’orbita circolare, detta **M** la massa di Giove e trascurando la massa del satellite, ricaviamo la distanza **D** del satellite dal centro di Giove:

$$D = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{4\,\pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\ s^2}\cdot 1.899\ \cdot\ 10^{27}\ \mathrm{kg}\cdot 127.7\ \cdot\ 10^7\ s^2}{39.48}} \simeq \sqrt[3]{4.099\ \cdot 10^{24}\ m^3}$$

$$\simeq 160.0\ \cdot\ 10^6\ \mathrm{m} = 160.0\ \cdot 10^3\ \mathrm{km}$$

Infine, sottraendo da questo valore il raggio di Giove, otteniamo la distanza **d** dalla superficie:

$$d = D - 71490\ \mathrm{km}\ \simeq 88550\ \mathrm{km}$$

Problema 12

Un pianeta di massa $1.6 \cdot 10^{26}$ kg si muove attorno a una stella su un'orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Trovare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla sua fotosfera è 54 volte quella sulla superficie della Terra.

Soluzione

Trascurando la massa del pianeta (vedere nota) ricaviamo la massa della stella dalla III legge di Keplero:

$$\mathrm{M_{stella}} = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{G\,T^2} \simeq \frac{39.48\ \cdot 2.44\ \cdot 10^{36}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot 3.98\ \cdot\ 10^{17}\ s^2} \simeq 3.63\ \cdot\ 10^{30}\,kg \simeq 1.82\,M_{Sole}$$

Possiamo ricavare il raggio della stella $\mathbf{R_{stella}}$ dalla relazione $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ ponendo $g_{stella} = 54\ g_{Terra}$:

$$R_{stella} = \sqrt{\frac{G\ \cdot M_{stella}}{54\ \cdot\ g_{Terra}}} \simeq \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\dfrac{m^3}{kg\ s^2}\ \cdot\ 3.63\ \cdot\ 10^{30}\,kg}{54\ \cdot 9.807\ \dfrac{m}{s^2}}} \simeq\ 6.76\ \cdot\ 10^5\,km \simeq 0.973\,R_{Sole}$$

Nota: l'assunzione iniziale $\mathrm{M_{pianeta}}$ trascurabile rispetto a quella, non ancora nota, della stella, risulta giustificata in quanto sappiamo, dallo studio della struttura ed evoluzione stellare, che la massa minima di una stella è: $\mathrm{M_{minima\ stella}} \geq 0.08\ \cdot \mathrm{M_{Sole}}\ \simeq\ 1.59\ \cdot\ 10^{29}\ \mathrm{kg}\ \simeq 1000\ \cdot \mathrm{M_{pianeta}}$

Problema 13

Calcolate, supponendo che la vostra massa sia di 50.0 kg, il vostro peso sulla superficie della Luna. Supponete poi di raddoppiare il raggio della Luna senza modificarne la massa, quanto diventerebbe il vostro peso?

Soluzione:

Detti $\mathbf{M_L}$ e $\mathbf{R_L}$ la massa e il raggio della Luna, l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_L}$ sulla superficie lunare vale:

$$g_L = \frac{G\,M_L}{{R_L}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 7.346 \cdot 10^{22}\ kg}{(1738 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 1.623\ \frac{m}{s^2}$$

Quindi il peso **P** sulla Luna di una persona con una massa **m** pari a 50.0 kg è:

$$P = m \cdot g_L \simeq 50.0\ kg \cdot 1.623\ \frac{m}{s^2} \simeq 81.2\ N$$

Se la Luna avesse stessa massa ma raggio doppio, l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_{L\text{-}2R}}$ sulla superficie varrebbe:

$$g_{L-2R} = \frac{G\,M_L}{(2\,R_L)^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 7.346 \cdot 10^{22}\ kg}{(3476 \cdot 10^3\ m)^2} \simeq 0.4058\ \frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione di gravità sarebbe quindi un quarto di quella attuale e il peso $\mathbf{P_{2R}}$ di una persona con una massa **m** pari a 50.0 kg sarebbe:

$$P_{2R} = m \cdot g_{L-2R} \simeq 50.0\ kg \cdot 0.4058\ \frac{m}{s^2} \simeq 20.3\ N$$

Problema 14

Un asteroide ha un raggio di 200 km e la sua densità media è pari a quella di Mercurio. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità alla superficie dell'asteroide in $\frac{m}{s^2}$

Soluzione

La massa **M** di un corpo, nota la sua densità media **ρ** e il volume **V** vale: $M = \rho V$

Per un corpo sferico di raggio **R** si ha: $M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

Il problema si può risolvere calcolando la densità di Mercurio dai dati nella Tabella e inserendo il valore ottenuto nella formula per il calcolo della massa dell'asteroide. Tuttavia esiste una soluzione più «veloce»

Detti $\mathbf{R_a}$ e $\mathbf{R_M}$ i raggi dell'asteroide e di Mercurio, consideriamo il rapporto tra la massa dell'asteroide $\mathbf{M_a}$ e quella di Mercurio $\mathbf{M_M}$:

$$\frac{M_a}{M_M} = \frac{\rho_a \ \frac{4}{3} \pi R_a{}^3}{\rho_M \ \frac{4}{3} \pi R_M{}^3}$$

Poiché le densità dei due corpi sono uguali avremo infine:

$$M_a = M_M \left(\frac{R_a}{R_M}\right)^3 \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \left(\frac{200 \ km}{2440 \ km}\right)^3 \simeq 3.301 \cdot 10^{23} kg \cdot 5.51 \cdot 10^{-4} \simeq 1.82 \cdot 10^{20} kg$$

Nota la massa possiamo calcolare l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_a}$ sulla superficie dell'asteroide

$$g_a = \frac{G \cdot M_a}{R_a{}^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \ s^2} \cdot 1.82 \cdot 10^{20} \ kg}{(200 \cdot 10^3 \ m)^2} \simeq 0.304 \ \frac{m}{s^2}$$

Problema 15

La forza di gravità che si esercita tra due corpi di forma sferica vale $F = 10^4$ N. Il primo corpo ha raggio $R_1 = 30.20$ km e densità $\varrho_1 = 1.420$ g/cm^3, il secondo corpo ha raggio $R_2 = 15.10$ km e densità $\varrho_2 = 3.440$ g/cm^3. A che distanza si trovano i centri dei due corpi?

Soluzione

Esprimiamo le densità dei due corpi in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Il fattore di conversione è: $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Le densità dei due corpi valgono quindi:

$$\rho_1 = 1.420 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1.420 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \qquad \rho_2 = 3.440 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 3.440 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Essendo $M = \varrho V$ e poiché i due corpi sferici con raggio $R_1 = 30.20$ km $= 30.20 \cdot 10^3$ m e $R_2 = 15.10$ km $= 15.10 \cdot 10^3$ m per le masse $\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$ otteniamo:

$$M_1 = \rho \frac{4}{3} \pi {R_1}^3 \simeq 1.420 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2.754 \cdot 10^{13}\, m^3 \simeq 1.638 \cdot 10^{17}\, kg$$

$$M_2 = \rho \frac{4}{3} \pi {R_2}^3 \simeq 3.440 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3.443 \cdot 10^{12}\, m^3 \simeq 4.961 \cdot 10^{16}\, kg$$

Ricaviamo infine la distanza **d** tra i centri dei due corpi dalla legge di Gravitazione Universale:

$$d = \sqrt{\frac{G\, M_1\, M_2}{F}} \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.638 \cdot 10^{17}\,\text{kg} \cdot 4.961 \cdot 10^{16}\,\text{kg}}{10^4 \frac{kg\, m}{s^2}}} \simeq 7.364 \cdot 10^9\, m$$

$$= 7.364 \cdot 10^6\, km$$

Problema 16

Calcolare l'accelerazione di gravità al limite superiore della fotosfera solare e quanto dovrebbe valere il raggio della Terra per avere alla sua superficie la stessa accelerazione di gravità.

Soluzione

Dette $\boldsymbol{M}_{\odot}$ la massa del Sole e $\boldsymbol{R}_{\odot}$ il suo raggio, l'accelerazione di gravità $\mathbf{g}_{\odot}$ alla superficie del Sole è data dalla relazione:

$$g_{\odot} = \frac{G \cdot M_{\odot}}{R_{\odot}^{\ 2}} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\, kg}{(6.955 \cdot 10^8 \text{ m})^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\, kg}{4.837 \cdot 10^{17}\, m^2} \simeq 274.4\, \frac{m}{s^2}$$

La relazione che lega il raggio della Terra $\mathbf{R_T}$ con la sua massa $\mathbf{M_T}$ e l'accelerazione di gravità $\mathbf{g_T}$ è:

$$R_T = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{g_T}}$$

Se in questa relazione poniamo $\mathbf{g_{T1}} = g_{\odot} = 274.4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, otteniamo il raggio $\mathbf{R_{T1}}$ che dovrebbe avere la Terra:

$$R_{T1} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{g_{T1}}} \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{274.4\, \frac{m}{s^2}}} \simeq 1205 \cdot 10^3\, m \simeq 1205\, km$$

Problema 17

Supponete di raddoppiare la massa del Sole. Mantenendo inalterato il valore dell'UA, quanto varrebbe il nuovo periodo di rivoluzione della Terra? Se la massa di Mercurio raddoppiasse, quale sarebbe il suo nuovo periodo di rivoluzione supponendo invariato il semiasse maggiore?

Soluzione

Scriviamo la III Legge di Keplero con i parametri attuali **a** e **T** dell'orbita terrestre e massa $\boldsymbol{M_\odot}$ e $\boldsymbol{M_T}$ del Sole e della Terra:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M_\odot + M_T)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

Raddoppiando la massa del Sole e detto $\mathbf{T_1}$ il nuovo periodo di rivoluzione della Terra si ha:

$$\frac{a^3}{{T_1}^2} = \frac{G\,(2\,M_\odot + M_T)}{4\,\pi^2} \simeq \frac{2\,G\,M_\odot}{4\,\pi^2} = \frac{G\,M_\odot}{2\,\pi^2}$$

Dividendo membro a membro queste due relazioni si ottiene il nuovo periodo di rivoluzione della Terra:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \text{da cui:} \qquad T_1 = T\,\sqrt{0.5} \simeq 0.7071\; anni \simeq 258.3\; g$$

Ovviamente si può arrivare alla soluzione calcolando direttamente il nuovo periodo di rivoluzione:

$$T_1 = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\,a^3}{G\,2\,M_\odot}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.348 \cdot 10^{33}\; m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\; s^2} \cdot 2 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\;\mathrm{kg}}} \simeq 2.231 \cdot 10^7\;\mathrm{s} \simeq 258.3\;\mathrm{g}$$

Raddoppiando la massa di Mercurio il suo periodo di rivoluzione resta invariato, in quanto avremmo:

$$\frac{{a_{Mercurio}}^3}{{T_{1Mercurio}}^2} = \frac{G\,(M_\odot + 2\,M_{Mercurio})}{4\,\pi^2} \simeq \frac{G\,M_\odot}{4\,\pi^2}$$

Problema 18

Calcolate il peso di un corpo di massa M = 100 kg all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno, considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

Soluzione

Detta **g** l'accelerazione di gravità, il peso **P** di un corpo è la forza di gravità tra corpo e pianeta: P = m g

Dalla relazione: $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ l'accelerazione di gravità alla superficie di Mercurio $\boldsymbol{g_M}$ e di Saturno $\boldsymbol{g_S}$ vale:

$$g_M = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23}\; kg}{(2440 \cdot 10^3\; m)^2} \simeq 3.700\; \frac{m}{s^2} \qquad g_S = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\; kg}{(60267 \cdot 10^3\; m)^2} \simeq 10.45\; \frac{m}{s^2}$$

In assenza di rotazione il peso del corpo sarà quindi: $P_M \simeq 370$ N $\quad P_S \simeq 1045$ N

Detti **T** il periodo di rotazione e **R** il raggio di un pianeta, la forza centrifuga, data dalla relazione:

$$F_c = m\, \frac{v^2}{R} = m\, \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \quad (\text{essendo} \quad v = \frac{2\,\pi\, R}{T})$$

all'equatore è diretta in senso opposto alla gravità e rende minore il peso del corpo. Per i due pianeti avremo:

$$F_{cM} \simeq 100\; kg\; \frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3\; m}{25.67 \cdot 10^{12}\; s^2} \simeq 3.75 \cdot 10^{-4}\; N \qquad F_{cS} \simeq 100\; kg\; \frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3\; m}{144.2 \cdot 10^7\; s^2} \simeq 165\; N$$

Tenendo conto della rotazione il peso del corpo all'equatore sarà quindi:

$$P_{M\_rot} \simeq 370\; \text{N} - 3.75 \cdot 10^{-4}\; N \simeq P_M \qquad P_S \simeq 1045\; \text{N} - 165\; \text{N} \simeq 880\; \text{N}$$

Problema 19

Per un ipotetico osservatore posto al centro della Terra calcolate le dimensioni angolari (diametro apparente) del Sole quando la Terra si trova all'afelio e quando si trova al perielio. Confrontate questi valori con quelli delle dimensioni angolari della Luna al perigeo e all'apogeo.

Soluzione

Detti $\mathbf{a_T}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_T}$ l'eccentricità dell'orbita della Terra, le distanze della Terra dal Sole all'afelio $\mathbf{d_{A\odot}}$ e al perielio $\mathbf{d_{P\odot}}$ valgono:

$$d_{A\odot} = a_T\,(1 + e_T) \simeq 152.1 \cdot 10^6\ km \qquad d_{P\odot} = a_T\,(1 - e_T) \simeq 147.1 \cdot 10^6\ km$$

Quindi, detto $\boldsymbol{R_\odot}$ il raggio del Sole, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{A\odot}}$ (Terra all'afelio) e massime $\mathbf{D_{P\odot}}$ (Terra al perielio) del Sole valgono:

$$\mathrm{D_{A\odot}} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_\odot}}{\mathrm{d_{A\odot}}}\right) \simeq 31'.44 \qquad \mathrm{D_{P\odot}} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_\odot}}{\mathrm{d_{P\odot}}}\right) \simeq 32'.51$$

Detti $\mathbf{a_L}$ il semiasse maggiore ed $\mathbf{e_L}$ l'eccentricità dell'orbita della Luna, le distanze della Luna dalla Terra all'apogeo $\mathbf{d_{AL}}$ e al perigeo $\mathbf{d_{PL}}$ valgono:

$$d_{AL} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 405.7 \cdot 10^3\ km \qquad d_{PL} = a_L\,(1 - e_L) \simeq 363.1 \cdot 10^3\ km$$

Quindi, detto $\boldsymbol{R_L}$ il raggio della Luna, per un osservatore al centro della Terra le dimensioni angolari minime $\mathbf{D_{AL}}$ (Luna all'apogeo) e massime $\mathbf{D_{PL}}$ (Luna al perigeo) della Luna valgono:

$$\mathrm{D}_{AL} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{d}_{AL}}\right) \simeq 29'.45 \qquad \mathrm{D}_{PL} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_L}}{\mathrm{d}_{PL}}\right) \simeq 32'.91$$

Notiamo che quando la Luna si trova all'apogeo la sua dimensione angolare è minore di quella del Sole anche quanto la Terra è all'afelio, mentre quando la Luna si trova al perigeo la sua dimensione angolare è maggiore di quella del Sole anche quando la Terra è al perielio.

Problema 20

Sulla Terra, quanto dovrebbe durare un giorno siderale (in hh:mm:ss) affinché un corpo posto all'equatore risulti privo di peso?

Soluzione

Affinché in un sistema di riferimento solidale con la Terra un corpo risulti privo di peso, la somma dell'accelerazione di gravità $\mathbf{a_g}$ e di quella centrifuga $\mathbf{a_c}$ deve essere pari a zero. All'equatore le due accelerazioni hanno stessa direzione, ma verso opposto.

Si avrà equilibrio quando: $\mathbf{a_c} = -\mathbf{a_g}$.

Quindi, dette $\mathbf{v}$ la velocità tangenziale, $\mathbf{M_T}$ e $\mathbf{R_T}$ massa e raggio della Terra, $\mathbf{m}$ la massa del corpo e considerando il modulo dei vettori deve essere:

$$m\,\frac{v^2}{R_T} = \frac{G\ \cdot\ M_T\ \ \cdot m}{R_T^2}$$

E poiché, detto $\mathbf{T}$ il periodo di rotazione, si ha: $v = \frac{2\,\pi\,R_T}{T}$, avremo:

$$\frac{4\,\pi^2 {R_T}^2}{T^2 R_T} = \frac{G\ \cdot\ M_T}{R_T^2}$$

possiamo ricavare la durata che dovrebbe avere il giorno:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2\ \cdot\ R_T^3}{G\ \cdot\ M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48\ \cdot\ 2.594\ \cdot\ 10^{20}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\ s^2}\cdot\ 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}} \simeq 5069\ s\ \simeq 1h\ 24m\ 29s$$

Problema 21

La Stazione Spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra su un orbita circolare a un'altezza h = 412 km. Calcolate il valore dell'accelerazione di gravità della Terra a quell'altezza. Perché vediamo gli astronauti a bordo della IIS "fluttuare" come se l'accelerazione di gravità fosse circa zero?

Soluzione

Detta **M** la massa della Terra ed **R** il suo raggio, il valore dell'accelerazione di gravità a un'altezza dalla superficie **h** è dato dalla relazione:

$$g_h = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2}$$

In particolare per h = 412 km avremo:

$$g_{h-412} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}{(6378 \cdot 10^3\, m + 412 \cdot 10^3\, m)^2} \simeq 8.65\, \frac{m}{s^2}$$

Questo valore è solo di circa il 12% minore dell'accelerazione di gravità al suolo. L'apparente assenza di gravità deriva dal fatto che la ISS è in orbita intorno alla Terra e quindi la forza di gravità è bilanciata dalla forza centrifuga.

Problema 22

Calcolate il minimo periodo di rivoluzione di un corpo di piccola massa che si muove su un'orbita circolare attorno a una nana bianca (WD) che ha raggio pari a quello della Terra. A che frazione della velocità della luce si muove il corpo? Nota: nella soluzione si tenga conto che il massimo valore possibile per la massa di una WD è pari a 1.44 volte quella del Sole.

Soluzione

Il periodo di rivoluzione **T** di un corpo di massa trascurabile in orbita ad una distanza **a** intorno a una stella di massa **M** vale:

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M}}$$

Il valore minimo del periodo T_{MIN} si ha quando il raggio dell'orbita è minimo (poiché si trova al numeratore), e quando la massa della nana bianca è massima (poiché si trova al denominatore). Il raggio minimo dell'orbita è pari al raggio della nana bianca: $\mathbf{a} = R_{WD} = R_{TERRA}$, mentre dalla teoria dell'evoluzione stellare (vedi nota nel testo) sappiamo essere: $M_{WD\ (max)} = 1.44\ M_{\odot}$. Avremo quindi:

$$T_{MIN} \simeq \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2.595 \cdot 10^{20}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.44 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}} \simeq 7.32\ s$$

La lunghezza **C** dell'orbita del corpo è: $C = 2\ \pi\ R_{Terra} \simeq 40074$ km, la sua velocità vale quindi:

$$v = \frac{C}{T} \simeq \frac{40074\ \text{km}}{7.32\ \text{s}} \simeq 5.47 \cdot 10^3\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \simeq 0.0183\ c = 1.83 \cdot 10^{-2}\ c$$