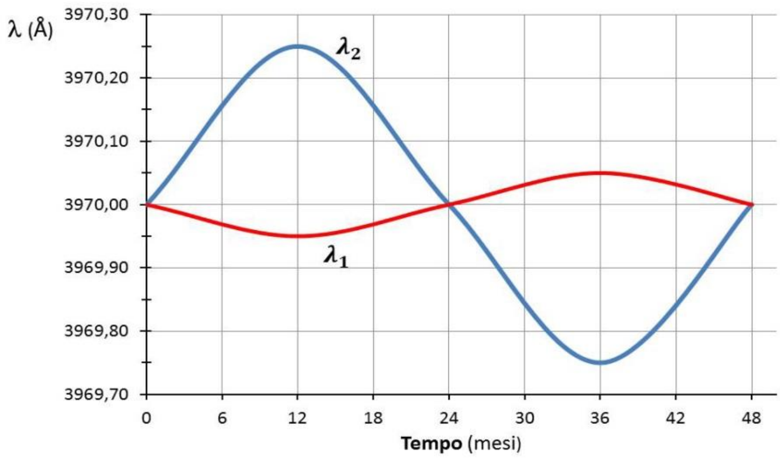
Olimpiadi Italiane di Astronomia 2020

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Prova Pratica - Una binaria spettroscopica: calcolo delle masse stellari



Una binaria spettroscopica è stata osservata nella riga H del Calcio ionizzato (Ca II H, lunghezza d'onda a riposo λ_0 = 3968.47 Å). All'inizio è visibile una sola riga, centrata alla lunghezza d'onda λ_{in} = 3970.00 Å. Nei giorni successivi cominciano a vedersi due righe, ciascuna dovuta a una delle due componenti del sistema binario. Le due righe hanno lunghezza d'onda centrate a $\boldsymbol{\lambda_1}$ (linea blu) e $\boldsymbol{\lambda_2}$ (linea rossa) con $\lambda_1 < \lambda_2$ (vedere figura a sinistra).

Con il passare del tempo la lunghezza d'onda delle righe varia, e la loro separazione cresce, fino a 12 mesi dalla prima osservazione. Successivamente la separazione tra le righe diminuisce e dopo altri 12 mesi (24 dalla prima osservazione) le due righe tornano a unirsi in una sola. Subito dopo, le due righe ricompaiono, ma scambiate di posizione, con cioè $\lambda_1 > \lambda_2$. Il ciclo si completa dopo 48 mesi, con le due righe che tornano nuovamente a unirsi in una sola. Sapendo che il piano orbitale del sistema binario è parallelo alla linea di vista e che i valori riportati in figura sono eliocentrici (cioè riportati a un sistema di riferimento solidale con centro del Sole) calcolare:

1. la velocità del baricentro del sistema binario rispetto al Sole, specificando se si sta avvicinando o allontanando;
2. la velocità delle due componenti rispetto al Sole a 12 e 36 mesi dalla prima osservazione;
3. la velocità delle due componenti rispetto al baricentro a 12 e 36 mesi dalla prima osservazione;
4. la distanza, in km e in UA, tra i centri delle due stelle assumendo le orbite attorno al baricentro circolari;
5. la massa totale del sistema binario e le masse delle due componenti, esprimendo i risultati in kg e in unità di masse solari.

Nella stima della lunghezza d'onda osservata si arrotondino i valori misurati sul grafico a 0.05 Å.

Soluzione

1. L'intersezione tra le due curve di velocità radiale si ha quando le componenti di velocità delle due stelle rispetto al baricentro sono nulle e quindi la velocità radiale coincide con quella del baricentro. Avremo quindi:

$$v_{baricentro} = c\ \frac{\lambda_{oss} - \lambda_0}{\lambda_0} \simeq 299792\ \frac{km}{s} \cdot \frac{3970.00\ \text{Å} - 3968.47\ \text{Å}}{3968.47\ \text{Å}} \simeq 115.58\ \frac{km}{s}$$

Poiché $\lambda_{oss} > \lambda_0$, la velocità radiale risulta positiva, quindi il sistema binario si sta allontanando dal Sole

2. Le velocità radiali $\boldsymbol{v_{1-12-Sole}}$ e $\boldsymbol{v_{2-12-Sole}}$ delle due componenti rispetto al Sole a 12 mesi dalla prima osservazione valgono:

$$v_{1-12-Sole} = c\ \frac{\lambda_{oss} - \lambda_0}{\lambda_0} \simeq 299792\ \frac{km}{s} \cdot \frac{3969.95\ \text{Å} - 3968.47\ \text{Å}}{3968.47\ \text{Å}} \simeq 111.81\ \frac{km}{s}$$

$$v_{2-12-Sole} = c\ \frac{\lambda_{oss} - \lambda_0}{\lambda_0} \simeq 299792\ \frac{km}{s} \cdot \frac{3970.25\ \text{Å} - 3968.47\ \text{Å}}{3968.47\ \text{Å}} \simeq 134.47\ \frac{km}{s}$$

Le velocità radiali $\boldsymbol{v_{1-36-Sole}}$ e $\boldsymbol{v_{2-36-Sole}}$ delle due componenti rispetto al Sole a 36 mesi dalla prima osservazione valgono:

$$v_{1-36-Sole} = c\ \frac{\lambda_{oss} - \lambda_0}{\lambda_0} \simeq 299792\ \frac{km}{s} \cdot \frac{3970.05\ \text{Å} - 3968.47\ \text{Å}}{3968.47\ \text{Å}} \simeq 119.36\ \frac{km}{s}$$
$$v_{2-36-Sole} = c\ \frac{\lambda_{oss} - \lambda_0}{\lambda_0} \simeq 299792\ \frac{km}{s} \cdot \frac{3969.75\ \text{Å} - 3968.47\ \text{Å}}{3968.47\ \text{Å}} \simeq 96.696\ \frac{km}{s}$$

Nota: le precedenti relazioni forniscono direttamente le velocità radiali perché il piano orbitale è parallelo alla direzione di osservazione. Nel caso più generale, occorre correggere le velocità così ottenute per l'angolo tra la perpendicolare alla direzione di osservazione e il piano orbitale.

3. Poiché l'orbita delle due stelle attorno al baricentro è circolare, la velocità orbitale si mantiene costante ed è quindi la stessa a 12 e a 36 mesi dalla prima osservazione. I loro valori $\boldsymbol{v_{1-bar}}$ e $\boldsymbol{v_{2-bar}}$ sono date, in valore assoluto, dalla differenza tra la velocità del baricentro rispetto al Sole e la velocità delle componenti rispetto al Sole in uno dei massimi della curva di velocità radiale, cioè a 12 o a 36 mesi dalla prima osservazione:

$$\boldsymbol{v_{1-bar}} = |\, v_{baricentro} - v_{1-12-Sole}| = |\, v_{baricentro} - v_{1-36-Sole}| \simeq 3.77\ \frac{km}{s}$$
$$\boldsymbol{v_{2-bar}} = |\, v_{baricentro} - v_{2-12-Sole}| = |\, v_{baricentro} - v_{2-36-Sole}| \simeq 18.89\ \frac{km}{s}$$

4. Dall'analisi delle curve di velocità radiale ricaviamo che il periodo di rivoluzione **P** del sistema binario attorno al baricentro vale:

P = 48 mesi = 4 anni giuliani = 365.25 · 4 = 1461 giorni $\simeq 126.2\ \cdot 10^6\ s$

Poiché le due orbite sono circolari, detta $\boldsymbol{d}$ la distanza dal baricentro vale la relazione:

$$d = \frac{v\ \cdot P}{2\,\pi}$$

e quindi per le due distanze d_1 e d_2 avremo:

$$d_1 = \frac{v_1 \cdot P}{2\,\pi} \simeq \frac{3.77\,\frac{km}{s} \cdot 126.2 \cdot 10^6\ s}{2\,\pi} \simeq 7.57\ \cdot\ 10^7\ km\ \simeq 0.506\ UA$$
$$d_2 = \frac{v_2 \cdot P}{2\,\pi} \simeq \frac{18.89\,\frac{km}{s} \cdot 126.2 \cdot 10^6\ s}{2\,\pi} \simeq 37.94\ \cdot\ 10^7\ km\ \simeq 2.536\ UA$$

5. Possiamo ricavare la massa totale delle due stelle $\boldsymbol{M_T}$ $(= M_1 + M_2)$ dalla III legge di Keplero, considerando che il semiasse maggiore dell'orbita $\boldsymbol{D}$ è la somma delle distanze delle due stelle dal baricentro $(D = d_1 + d_2 = 45.51 \cdot 10^{10}\ m)$:

$$M_T = \frac{4\,\pi^2 \cdot D^3}{G\ \cdot\ P^2} \simeq \frac{4\,\pi^2\ \cdot\ 9.426 \cdot 10^{34}\ m^3}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ \cdot\ s^2}\ \cdot\ 1.593 \cdot 10^{16}\ s^2} \simeq 3.50\ \cdot\ 10^{30}\ kg\ \simeq\ 1.76\ M_{Sole}$$

Dalle proprietà del baricentro sappiamo inoltre che:

$M_1\ \cdot\ d_1 = M_2\ \cdot\ d_2$ e quindi: $M_1 = \frac{d_1}{d_2}\,M_2$

e infine:

$$M_T = \frac{d_1}{d_2}\,M_2 + M_2 = M_2\,(1 + \frac{d_1}{d_2})$$

da cui ricaviamo:

$$M_2 = \frac{M_T}{(1 + \frac{d_1}{d_2})} \simeq \frac{3.50\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{1.20} \simeq 2.92\ \cdot\ 10^{30}\ kg\ \simeq\ 1.47\ M_{Sole}$$

e analogamente:

$$M_1 = \frac{M_T}{(1 + \frac{d_2}{d_1})} \simeq \frac{3.50\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{6.01} \simeq 5.82\ \cdot\ 10^{29}\ kg\ \simeq\ 0.29\ M_{Sole}$$

Nota: nel calcolo del periodo è stata considerata la presenza di un anno bisestile tra i quattro su cui si estendono le osservazioni. Quindi 48 mesi equivalgono a quattro anni giuliani di 365.25 giorni.