Olimpiadi Italiane di Astronomia 2020

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Senior - Lezione 3

1. Una stella dista dal Sole d = 326.2 anni luce e ha magnitudine apparente m_s= 3.25 e temperatura della fotosfera T_s = 3000 K. Si determini la magnitudine assoluta della stella e il suo raggio in unità di raggi solari e in km.

Soluzione

*La distanza della stella in parsec **D** vale:* $D \simeq \frac{d}{3.2616} \simeq 100.0\, pc$. *La magnitudine assoluta* $\boldsymbol{M_s}$ *della stella vale:*

$$M_s = m + 5 - 5 \log d \simeq 3.25 + 5 - 5 \log (100.0) \simeq -1.75$$

Dalla relazione $M_\odot - M_S = -2.5 \log\left(\frac{L_\odot}{L_S}\right)$ *ricaviamo:*

$$\log\left(\frac{L_\odot}{L_S}\right) \simeq -2.63 \qquad \text{da cui: } L_S \simeq \frac{L_\odot}{10^{-2.63}} \simeq 427\, L_\odot$$

Applicando la legge di Stefan-Boltzmann alle due stelle:

$$4\,\pi\, {R_S}^2\, \sigma\, {T_S}^4 = 427 \cdot 4\,\pi\, {R_\odot}^2\, \sigma\, {T_\odot}^4$$

e quindi:

$$R_S = R_\odot \sqrt{427 \left(\frac{T_\odot}{T_S}\right)^4} \simeq R_\odot \sqrt{427 \left(\frac{5778}{3000}\right)^4} \simeq 76.7\, R_\odot \simeq 53.3 \cdot 10^6\, km$$

La stella è una "gigante rossa", il suo raggio è quasi uguale al semiasse maggiore dell'orbita di Mercurio

2. Un ammasso stellare non risolto è composto da "N" stelle tutte uguali al Sole. L'ammasso si trova a una distanza di 45.0 · 10^3 anni luce e la sua magnitudine integrata è m_{TOT} = 15.1. Calcolare il numero di stelle "N" che compongono l'ammasso.

Soluzione

Alla distanza d = 45 · 10^3 *anni luce ≃ 13800 pc, la magnitudine apparente del Sole è data da:*

$$m_\odot = M - 5 + 5 \log d \simeq 4.83 - 5 + 5 \log 13800 \simeq 20.53$$

Consideriamo la differenza di magnitudine tra l'ammasso e il Sole visto alla distanza dell'ammasso:

$m_{TOT} = m_\odot - 2.5 \log \frac{F_{TOT}}{F_\odot} = m_\odot - 2.5 \log \frac{N\, F_\odot}{F_\odot} = m_\odot - 2.5 \log N$ *da cui ricaviamo:*

$$N = 10^{\left(\frac{m_\odot - m_{TOT}}{2.5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{20.53 - 15.1}{2.5}\right)} \simeq 150$$

3. Arturo (= α Boo, m_v = -0.04) è la stella più luminosa dell'emisfero boreale. Il flusso incidente da Arturo alla sommità dell'atmosfera terrestre vale: f = 4.51 · 10^{-8} W/m^2. Sapendo che Arturo dista dal Sole d_A = 36.7 anni luce e che il suo raggio è R_A = 25.5 $R_\odot$, calcolare la temperatura della sua fotosfera.

Soluzione.

*Detta **T** la temperatura della fotosfera di Arturo, la quantità di energia totale* L_A *(luminosità) emessa è legata al flusso incidente alla sommità dell'atmosfera dalla relazione:*

$$f = \frac{L_A}{4\,\pi\, d_A^2} = \frac{4\,\pi\, R_A^2\, \sigma\, T^4}{4\,\pi\, d_A^2}$$

da cui si ricava:

$$T = \sqrt[4]{\frac{f\, d_A^2}{R_A^2\, \sigma}} \simeq \sqrt[4]{\frac{4.51 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2} \cdot 1.21 \cdot 10^{35}\ m^2}{3.14 \cdot 10^{20}\ m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\, K^4}}} \simeq \sqrt[4]{3.07 \cdot 10^{14}} \simeq 4180\ K$$

4. Calcolare il potere risolutivo, a 5500 Å, di un telescopio con apertura di 1 m posto sulla superficie della Terra. Potete osservare con questo strumento, usando le precauzioni del caso, una macchia solare con diametro pari a quello della Terra posta sull'equatore del Sole? Potete osservare un cratere lunare con diametro di 500 m posto sull'equatore della Luna?

Soluzione

Il potere risolutivo α del telescopio in secondi d'arco vale:

$$\alpha = 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10}}{1} \cdot 206265 \simeq = 0''.14$$

Tuttavia se il telescopio è posto sulla superficie della Terra il suo potere risolutivo "reale" è limitato a circa 1" dagli effetti della turbolenza atmosferica. Nel seguito due delle possibili soluzioni per la seconda domanda, dove vengono trascurate le dimensioni del Sole, della Terra e della Luna rispetto alle loro distanze.

Soluzione (2a)

*Detti **d** il diametro della macchia solare, **D** la distanza media Terra-Sole e β l'angolo sotteso dalla macchia osservata dalla Terra, si ha:*

$$\beta = \tan^{-1}\frac{d}{D} \simeq \tan^{-1}\frac{12756\ km}{149.6 \cdot 10^6\ km} \simeq 0°.004885 = 17''.59$$

la macchia risulta quindi ben osservabile, in quanto il valore ottenuto è maggiore della risoluzione del telescopio anche tenendo conto degli gli effetti della turbolenza dell'atmosfera.

*Detti **K** il diametro del cratere lunare, **L** la distanza media Terra-Luna e γ l'angolo sotteso dal cratere osservato dalla Terra, si ha:*

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{K}{L} \simeq \tan^{-1}\frac{0.5\ km}{384.4 \cdot 10^3\ km} \simeq 7°.45 \cdot 10^{-5} \simeq 0''.27$$

Poiché $\gamma > \alpha$ il cratere sarebbe in teoria distinguibile con il nostro telescopio, ma in pratica la turbolenza atmosferica ne impedisce l'osservazione

Soluzione (2b)

*Calcoliamo le dimensioni lineari **A** e **B**, corrispondenti a un angolo δ = 1" (pari al potere risolutivo considerando gli effetti della turbolenza atmosferica) alla distanza del Sole e della Luna:*

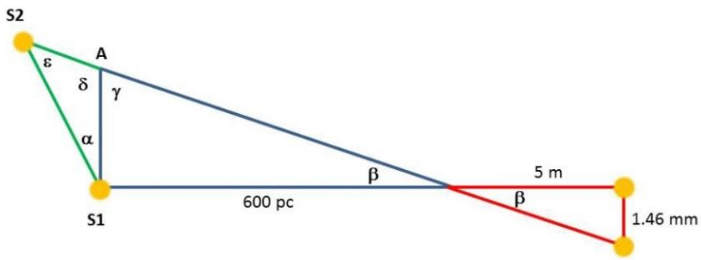
$$A = D \cdot \tan\delta \simeq 149.6 \cdot 10^6\ km \cdot \tan 2°.778 \cdot 10^{-4} \simeq 725.3\ km$$

$$B = L \cdot \tan\delta \simeq 384.4 \cdot 10^3\ km \cdot \tan 2°.778 \cdot 10^{-4} \simeq 1.864\ km$$

Vediamo quindi che la macchia solare sarebbe facilmente distinguibile ($A < 2R_{Terra}$), mentre l'osservazione del cratere lunare non sarebbe possibile (B > K).

5. Sul piano focale di un telescopio con F = 500 cm le due componenti di una binaria visuale distano tra di loro 1.46 mm. Sappiamo che una delle due componenti dista dal Sole 600 pc e che il piano orbitale della binaria forma un angolo α = 30° (con la seconda stella a distanza maggiore della prima) con la perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolare la distanza tra le due stelle della binaria.

Soluzione.



La distanza angolare nel cielo delle due stelle è data dalla relazione:

$$\boldsymbol{\beta} = arctg\,\frac{1.46\,mm}{5000\,mm} \simeq 1'$$

La distanza S1-A vale quindi:

S1-A $\simeq$ *600 pc · tan* $\boldsymbol{\beta} \simeq$ *5.39 ·* 10^{12} ***km*** $\simeq$ *36000 UA*

Il triangolo S1-S2-A si può risolvere con il teorema dei seni, ma essendo:

$$\delta = 180° - \gamma = 180° - 180 + 90° + \beta = 90°\,1'$$

possiamo approssimarlo a un triangolo rettangolo (ovviamente il disegno non è in scala) e quindi:

$$S1\text{-}S2 = \frac{S1-A}{\cos\alpha} = \frac{5.39 \cdot 10^{12}\,km}{\cos\,30°} \simeq 6.22 \cdot 10^{12}\ km \simeq 41570\ UA$$

6. Una nebulosa planetaria si espande in modo isotropo con una velocità costante v = 17 km/s. Dal febbraio 1972 al febbraio 2017 le dimensioni angolari del suo raggio sono aumentate da $\alpha_{1972} = 34"$ a $\alpha_{2017} = 40"$. Calcolate la distanza, in anni luce e in parsec, della nebulosa e il suo diametro nel febbraio 2017 in km e in UA.

Soluzione.

Poiché l'espansione è isotropa e con velocità costante, in 45 anni ($t \cong 1.42 \cdot 10^{9}$ *s) le dimensioni della nebulosa planetaria sono aumentate linearmente di:*

$$\Delta X = v \cdot t \simeq 17.0\ \frac{km}{s} \cdot 1.42 \cdot 10^{9}\ s \simeq 2.41 \cdot 10^{10}\ km$$

Nello stesso tempo l'aumento di dimensioni angolari è stato di $\Delta\alpha = 6'' \simeq 1°.67 \cdot 10^{-3}$

La distanza ***d*** *per cui a una variazione lineare ΔX corrisponde una variazione angolare* $\Delta\alpha$ *è:*

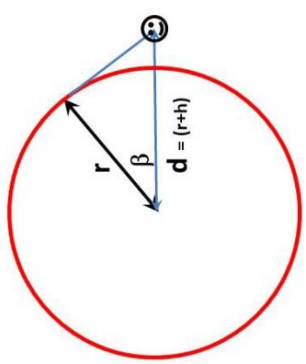
$$d = \frac{\Delta X}{\tan\Delta\alpha} \simeq \frac{2.41 \cdot 10^{10}\,km}{\tan 1°.67 \cdot 10^{-3}} \simeq 8.27 \cdot 10^{14}\ km \simeq 87.4\ \text{anni luce} \simeq 26.8\ \text{parsec}$$

Poiché le dimensioni angolari valgono attualmente α = 40", nota la distanza della nebulosa ne ricaviamo il diametro ***D*** *dalla relazione:*

$$D = 2 \cdot d \cdot \tan\alpha \simeq 2 \cdot 8.27 \cdot 10^{14}\,km \cdot \tan 1°.11 \cdot 10^{-2} \simeq 3.21 \cdot 10^{11}\,km \simeq 2150\,UA$$

7. Transitando sopra il Polo Nord, un astronauta nota che può vedere la città di Anchorage (λ = 149° 43' O, φ = 61° 13' N). A che altezza minima si trovava l'astronauta? Si trascurino gli effetti della rifrazione.

Soluzione



Poiché l'astronauta si trova sulla verticale del Polo Nord, l'angolo limite di osservabilità sulla Terra coincide con la latitudine e vale:

$$\boldsymbol{\beta = 28°\ 47'}$$

L'altezza minima è quindi quella da cui è possibile osservare due punti sulla superficie della Terra, di cui il primo sotto l'osservatore, separati da tale distanza angolare.

Poiché: r = (r + h) cos β*, otteniamo:*

$$h = \frac{r}{\cos\beta} - r \simeq \frac{6378\,km}{0.8764} - 6378\,km \simeq 900\ km$$

8. Osservando un quasar, una riga spettrale, la cui lunghezza d'onda a riposo è $\lambda_0 = 3000\,\text{Å}$ viene osservata a $\lambda_{obs} = 15000\,\text{Å}$. Quanto valgono la velocità di recessione del quasar e la sua distanza? Si assuma per la costante di Hubble il valore: H = 67.4 km s^{-1} Mpc^{-1}.

Soluzione.

*Detta **v** la velocità di recessione del quasar e considerando la correzione relativistica, la relazione tra lunghezza d'onda osservata e lunghezza d'onda a riposo è:*

$$\lambda_{oss} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

Da cui si ricava:

$$v = \frac{{\lambda_{oss}}^2 - {\lambda_0}^2}{{\lambda_{oss}}^2 + {\lambda_0}^2} \cdot c = \frac{22500 \cdot 10^4\,\text{Å}^2 - 900 \cdot 10^4\,\text{Å}^2}{22500 \cdot 10^4\,\text{Å}^2 + 900 \cdot 10^4\,\text{Å}^2} \cdot c \simeq 0.9231\,c \simeq 276700\,\frac{km}{s}$$

*Per il calcolo della distanza **D** del quasar utilizziamo la legge di Hubble:*

$$D = \frac{v}{H} \simeq \frac{276700\,\frac{km}{s}}{67.4\,\frac{km}{s}\,Mpc} \simeq 4100\,Mpc \simeq 13.37 \cdot 10^9\,anni\ luce$$

9. Nel 2011 venne diffusa la notizia che il CERN di Ginevra e i Laboratori Nazionali del Gran Sasso avevano rilevato una velocità dei neutrini superiore a quella della luce di un fattore $20 \cdot 10^{-6}$. La notizia è stata poi smentita ma, qualora vera, calcolare quanto tempo sarebbe passato tra l'arrivo sulla Terra del primo neutrino e l'arrivo del primo segnale luminoso provenienti dalla supernova SN1987A esplosa nella Grande Nube di Magellano (LMC, distanza = 49.97 kpc). La Grande Nube di Magellano non è osservabile alle latitudini del CERN e del Gran Sasso, come avrebbero potuto questi due laboratori rivelare i neutrini della SN 1987A ?

Soluzione.

La distanza della LMC è: $D_{LMC} \simeq 49.97 \cdot 10^3\,pc \cdot 3.262 \simeq 163.0 \cdot 10^3\,anni\ luce$. Il segnale luminoso viaggia alla velocità della luce, mentre, per l'ipotesi fatta, i neutrini viaggerebbero a una velocità: $v_n = c + 20 \cdot 10^{-6}\,c = (1 + 20 \cdot 10^{-6})\,c$. Il tempo impiegato dai fotoni e dai neutrini sarebbe quindi:

$$t_{fotoni} = \frac{D_{LMC}}{c} = 163000\ \textit{anni}$$

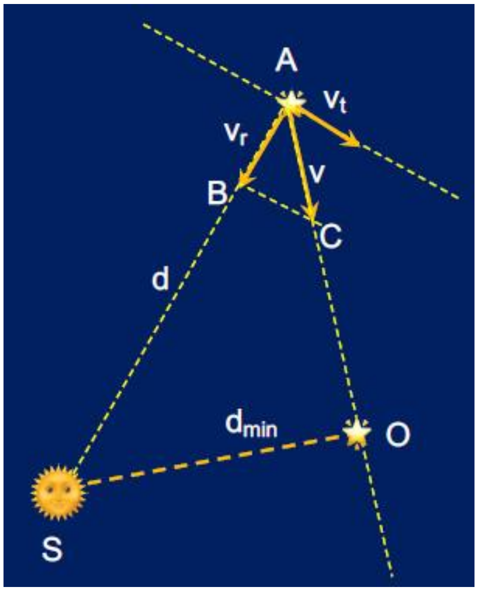
$$t_{neutrini} = \frac{D_{LMC}}{(1+20 \cdot 10^{-6})\,c} = \frac{t_{fotoni}}{(1+20 \cdot 10^{-6})} \simeq 162996.7\ \textit{anni}$$

Quindi i neutrini sarebbero dovuti arrivare circa 3.3 anni prima dei fotoni. I neutrini sono in grado di attraversare la Terra praticamente indisturbati; è quindi possibile osservare i neutrini provenienti da oggetti celesti che si trovano al di sotto dell'orizzonte.

10. Altair (α Aql) ha una parallasse π = 0".198, un moto proprio μ = 0.658 arcsec/anno, una velocità radiale V_r = –26.0 km/sec e una magnitudine visuale m = 0.89. Tra quanto tempo si troverà alla minima distanza dal Sole? Quale sarà il valore di tale distanza? Si determini la magnitudine visuale di Altair in quel punto.

Soluzione.

*Il moto di Altair rispetto al Sole avviene con velocità **V**, che può essere scomposta in una componente radiale **V_r** e in una componente tangenziale **V_t***



Nella figura a sinistra (realizzata da D. Spiga – OA Brera) possiamo identificare due triangoli rettangoli simili. Uno ha per cateti AB (= V_r) e BC (= V_t) e per ipotenusa AC (= V). L'altro ha per cateti SO (= d_{min}, la distanza minima che avrà Altair dal Sole) e AO (la distanza che Altair deve percorrere per arrivare al punto di distanza minima) e per ipotenusa SA (= d, l'attuale distanza di Altair dal Sole).

Avremo quindi:

$$V_t : d_{min} = V : d \qquad e \qquad V_r : AO = V : d$$

Da cui ricaviamo:

$$d_{min} = \frac{Vt \cdot d}{V} \qquad e \qquad AO = \frac{Vr \cdot d}{V}$$

La distanza attuale di Altair vale:

$$d = \frac{1}{\pi} \simeq \frac{1}{0''.198} \simeq 5.05\, pc \simeq 1.56 \cdot 10^{14}\, km$$

Il valore negativo per la velocità radiale indica che la stella si muove in direzione del Sole, quindi nei calcoli ne assumeremo il valore assoluto.

Dal valore della velocità tangenziale, sappiamo che Altair si sposta in cielo di 0".658/anno, che alla distanza d = $1.56 \cdot 10^{14}\, km$*, corrisponde a percorrere in un anno una distanza* ***D*** *pari a:*

$$D = d \cdot \tan\alpha = 1.56 \cdot 10^{14} \cdot \tan 1°.83 \cdot 10^{-4} \simeq 498 \cdot 10^{6}\, km$$

Ne deriva che Altair ha una velocità tangenziale:

$$Vt = \frac{D}{t} \simeq \frac{498 \cdot 10^{6}\, km}{315.6 \cdot 10^{5}} \simeq 15.8\, \frac{km}{s}$$

Di conseguenza, la velocità di Altair nello spazio rispetto al Sole è:

$$V = \sqrt{Vr^2 + Vt^2} \simeq \sqrt{676 + 250} \simeq 30.4\, \frac{km}{s}$$

Avremo infine:

$$d_{min} = \frac{Vt \cdot d}{V} = \frac{15.8 \cdot 1.56 \cdot 10^{14} \cdot}{30.4} \simeq 8.11 \cdot 10^{13}\, km = 2.63\, pc$$

Mentre per il tempo ***T*** *si ottiene:*

$$T = \frac{AO}{V} = \frac{Vr \cdot d}{V^2} = \frac{26.0 \cdot 1.56 \cdot 10^{14}}{924} \simeq 4.39 \cdot 10^{12}\, s \simeq 139000\, anni$$

Dalla magnitudine apparente attuale ricaviamo la magnitudine assoluta di Altair:

$$M = m + 5 - 5\log d = 2.37$$

Ricaviamo infine la magnitudine apparente che avrà Altair alla minima distanza dalla relazione:

$$m = M - 5 + 5\log d_{min} \simeq 2.37 - 5 + 5\log 2.63 \simeq -0.53$$