**Olimpiadi Italiane di Astronomia 2020**

**Corso di preparazione alla Finale Nazionale**

**Categoria Junior 1 - Lezione 3**

1. La stella "α Cen A" ha magnitudine apparente $m_v$ = -0.01 e parallasse $\pi = 0''.747$; calcolate la sua distanza, in pc e in a.l., e la sua magnitudine assoluta $M_v$

**Soluzione**

*Dalla parallasse di α Cen A ricaviamo la sua distanza:*

$$d\,(\alpha\ Cen\ A) = \frac{1}{0''.747} \simeq 1.34\ pc\ \simeq 4.37\ anni\ luce$$

*La magnitudine assoluta di α Cen A vale quindi:*

$$M_V(\alpha\ Cen\ A) = m_V\,(\alpha\ Cen\ A) + 5 - 5 \log d\,(\alpha\ Cen\ A) = -0.01 + 5 - 0.64 = 4.35$$

2. Due stelle hanno magnitudini apparenti $m_1$ = 3.74 e $m_2$ = 4.15. Quanto vale la somma delle magnitudini delle due stelle?

**Soluzione**

*Per calcolare la somma delle magnitudini possiamo usare la relazione:*

$$m_{1+2} = m_2 - 2.5 \log \left(10^{0.4\,(m_2 - m_1)} + 1\right) = 4.15 - 2.5 \log \left(10^{0.4\,(4.15 - 3.74)} + 1\right) = 3.17$$

*Oppure, considerando i flussi:*

$$m_{1+2} = -2.5 \log\,(10^{-0.4\,m_1} + 10^{-0.4\,m_2}) = -2.5 \log\,(10^{-1.496} + 10^{-1.66}) = 3.17$$

3. La magnitudine assoluta di una stella nella galassia di Andromeda, la cui distanza è di $2.25 \cdot 10^6$ anni luce, è M = - 5.00. Calcolate la magnitudine apparente della stella. Se questa stella esplodesse come supernova, diventando $10^5$ volte più luminosa, quanto varrebbero la sua magnitudine assoluta e la sua magnitudine apparente?

**Soluzione**

*Poiché* $2.25 \cdot 10^6$ *anni luce* $\simeq 690 \cdot 10^3$ *parsec, alla relazione M = m + 5 - 5 log d, ricaviamo:*

$$m = M - 5 + 5 \log d \simeq -5.00 - 5 + 5 \log 690 \cdot 10^3 \simeq 19.2$$

*La magnitudine assoluta* $\boldsymbol{M_S}$ *della supernova si ricava dalla relazione:*

$$M_S - M = -2{,}5 \log\left(\frac{F_{supernova}}{F_{stella}}\right) = -2{,}5 \log\,(10^5)$$

*da cui:*

$$M_S = M - 2.5 \log\,(10^5) = -17.5 \qquad\qquad m_S = m - 2.5 \log\,(10^5) = 6.7$$

4. Calcolate, in km/s, la velocità orbitale della Luna intorno alla Terra al perigeo e all'apogeo e la velocità orbitale della Terra intorno al Sole al perielio e all'afelio. Assumete, in prima approssimazione, il centro della Terra come centro di massa del sistema Terra-Luna e il centro del Sole come centro di massa del sistema Sole-Terra

**Soluzione**

*La media delle velocità della Luna lungo la sua orbita è data dalla relazione:*

$$v_{mL} = \sqrt{\frac{G\,M_T}{a}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\,kg}{384.4 \cdot 10^6\,m}} \simeq 1018\,\frac{m}{s} = 1.018\,\frac{km}{s}$$

*La velocità della Luna al perigeo e all'apogeo valgono quindi:*

$$v_{pL} = v_{mL}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \simeq 1.018\,\frac{km}{s}\sqrt{\frac{1+0.0549}{1-0.0549}} \simeq 1.08\,\frac{km}{s}$$

$$v_{aL} = v_{mL}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \simeq 1.018\ \frac{km}{s}\sqrt{\frac{1-0.0549}{1+0.0549}} \simeq 0.964\ \frac{km}{s}$$

*Per la Terra, in modo del tutto analogo, al perielio e all'afelio avremo:*

$$v_{mT} = \sqrt{\frac{G\ M_{\text{Sole}}}{a}} \simeq \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}\cdot\ 1.989\ \cdot\ 10^{30}\ kg}{149.6\ \cdot\ 10^9\ m}} \simeq 29.79\ \frac{km}{s}$$

$$v_{pT} = v_{mT}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \simeq 29.79\ \frac{km}{s}\sqrt{\frac{1+0.0167}{1-0.0167}} \simeq 30.3\ \frac{km}{s}$$

$$v_{aT} = v_{mT}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \simeq 29.79\ \frac{km}{s}\sqrt{\frac{1-0.0167}{1+0.0167}} \simeq 29.3\ \frac{km}{s}$$

**5.** Giove ha una rotazione molto rapida. Un qualsiasi punto sul suo equatore ha una velocità tangenziale v = 12.57 km/s. A che altezza dalla superficie di Giove dovete porre un satellite artificiale in orbita equatoriale affinché il suo periodo di rivoluzione sia uguale al periodo di rotazione del pianeta (risultando così un satellite "Giove-stazionario")?

**Soluzione**

*La velocità tangenziale all'equatore* $\boldsymbol{v_T}$ *è legata al periodo di rotazione* $\boldsymbol{T}$ *dalla relazione:*

$$T = \frac{2\ \pi\ R}{v_T} \simeq \frac{449.18\ \cdot\ 10^3\ km}{12.57\ \frac{km}{s}} \simeq 35730\ s\ \simeq 9.926\ h$$

*Dalla III Legge di Keplero, assumendo l'orbita circolare, ricaviamo da distanza* ***D*** *del satellite dal centro di Giove:*

$$D = \sqrt[3]{\frac{G\ M\ T^2}{4\ \pi^2}} \simeq \sqrt[3]{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\frac{m^3}{kg\ s^2}\cdot 1.899\ \cdot\ 10^{27}kg\ \cdot 127.7\ \cdot\ 10^7\ s^2}{39.48}} \simeq \sqrt[3]{4.099\ \cdot 10^{24}}$$
$$\simeq 160.0\ \cdot\ 10^6\ m = 160.0\ \cdot 10^3\ km$$

*sottraendo il raggio di Giove, la distanza* ***d*** *dalla superficie vale: d = D – 71490 ≃ 88510 km*

**6.** A quale distanza dalla superficie della Terra un uomo la cui massa vale: m = 80.0 kg, ha un peso P =600 N?

**Soluzione**

*Poiché il peso è dato dalla relazione: P = m g, detta* ***r*** *la distanza dal centro della Terra, per avere P = 600 N occorre che:*

$$g_r = \frac{P}{m} = \frac{600\ N}{80.8\ kg} = 7.50\ \frac{m}{s^2}$$

*Detta* ***h*** *l'altezza sulla superficie e* ***R*** *il raggio della Terra, si ha r = R + h e quindi:*

$$g_r = \frac{G\ M_{Terra}}{(R+h)^2}$$

*da cui ricaviamo:*

$$h = \sqrt{\frac{G\ \ M_{Terra}}{g_r}} - R\ \simeq \sqrt{\frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}\cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}{7.50\ \frac{m}{s^2}}} - 6378\ \cdot\ 10^3\ m\ \simeq\ 912\ \cdot\ 10^3\ m = 912\ km$$

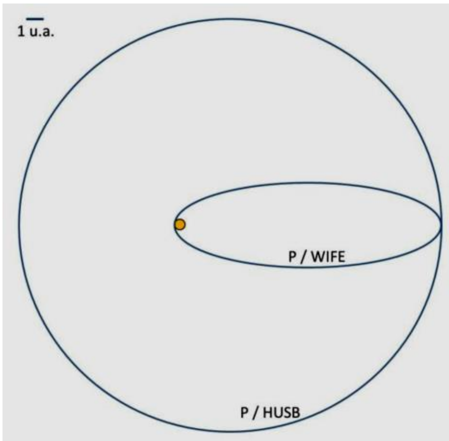
**7.** Le comete P/HUSB (e = 0.230) e P/WIFE (e = 0.950) hanno la stessa linea degli apsidi (ovvero i semiassi maggiori delle loro orbite giacciono sulla stessa retta) ed entrambe hanno distanza all'afelio di 15.02 UA. A metà aprile 2016 le due comete si trovavano entrambe al perielio, quale sarà, approssimativamente, la loro posizione a fine Agosto 2037?

**Soluzione**

*Dette $D_P$ le $D_A$ le distanze al perielio e all'afelio, **a** e **b** le lunghezze dei semiassi in UA e **T** il periodo di rivoluzione in anni, dalle relazioni:*

$$D_P = D_A \frac{1-e}{1+e}; \qquad a = \frac{D_a + D_p}{2}; \qquad b = a\sqrt{1-e^2}; \qquad T = \sqrt{a^3},$$

*otteniamo per le due comete i valori riportati nella seguente tabella:*




| Nome | $D_A$ | $D_P$ | a | b | e | T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P/HUSB | 15.02 | 9.40 | 12.21 | 11.88 | 0.230 | 42.67 |
| P/WIFE | 15.02 | 0.385 | 7.70 | 2.40 | 0.950 | 21.4 |

*Sapendo che le due comete hanno la stessa linea degli apsidi, otteniamo la figura a sinistra, con entrambe le comete al perielio a metà aprile 2016.*

*A fine Agosto 2037 saranno trascorsi circa 21.38 anni (21 anni + 4.5 mesi), un tempo simile a quello di rivoluzione di P/WIFE e pari a circa la metà di quello di rivoluzione di P/HUSB. Quindi la cometa P/WIFE sarà nuovamente nei pressi del perielio, mentre P/HUSB si troverà nei pressi dell'afelio.*

**8.** Schematizzando la Galassia come un disco di $10^5$ anni luce di diametro e spessore trascurabile, si fornisca una stima della sua massa totale in masse solari, sapendo che il Sole si trova a una distanza dal centro di circa 8.34 kpc e assumendo per l'anno galattico (il tempo che il Sole impiega per una rotazione completa intorno al centro della Galassia) una durata di $233 \cdot 10^6$ anni. Stimate infine la velocità di fuga dalla Galassia a una distanza dal centro pari al doppio del suo diametro.

**Soluzione**

*Un anno galattico vale:* $\boldsymbol{T} \simeq 7.35 \cdot 10^{15} s$, *dalla III Legge di Keplero la massa della Galassia entro un raggio **a** di 8.34 kpc* $(\simeq 2.57 \cdot 10^{20}\ m)$ *dal centro vale:*

$$M_g = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 1.70 \cdot 10^{61}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.41 \cdot 10^{31}\ s^2} \simeq 1.86 \cdot 10^{41} kg$$

$$\simeq 93.5 \cdot 10^9\ M_\odot$$

*Per ottenere la massa totale $\boldsymbol{M_{Galassia}}$, dobbiamo considerare che, nell'approssimazione fatta, la massa è proporzionale all'area del disco su cui è distribuita. Il raggio **R** della Via Lattea è di circa 50000 anni luce ≃ 15.33 kpc, per cui:*

$$M_{Galassia} : \pi R^2 = M_g : \pi a^2$$

$$M_{Galalssia} \simeq M_g \left(\frac{R}{a}\right)^2 \simeq 1.86 \cdot 10^{41} kg \left(\frac{15.33\ kpc}{8.34\ kpc}\right)^2 \simeq 6.28 \cdot 10^{41} kg \simeq 316 \cdot 10^9\ M_\odot$$

*La velocità di fuga a una distanza **D** dal centro di un corpo di massa **M** è data dalla relazione:*

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{D}}$$

*quindi:* $$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{4R}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 6.28 \cdot 10^{41} kg}{1.892 \cdot 10^{21}\ m}} \simeq 210 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} = 210\ \frac{km}{s}$$

**9.** Un satellite artificiale si muove con una velocità di 6.910 km/s nella direzione della rotazione terrestre su un'orbita equatoriale. All'equinozio di primavera un osservatore sull'equatore della Terra lo vede transitare lungo un diametro del disco solare, quanto tempo dura il transito? Si assuma per il Sole un diametro di 32' e si trascuri la rotazione della Terra.

**Soluzione**

*Ricaviamo il periodo **T** di rivoluzione del satellite. La velocità lungo un'orbita circolare attorno alla Terra è data dalla relazione:* $v = \sqrt{\frac{G\,M_{Terra}}{a}}$*, ed essendo* $T = \frac{2\,\pi\,a}{v}$ *si ottiene:*

$$T = \frac{2\,\pi\,G\,M_{Terra}}{v^3} \simeq \frac{2\,\pi\ \cdot 6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.972\ \cdot\ 10^{24}\ kg}{3.299\ \cdot\ 10^{11}\ \frac{m^3}{s^3}} \simeq 7590\ s$$

*Detto* $\boldsymbol{T_T}$ *il tempo del transito del satellite sul disco solare, trascurando la rotazione della Terra vale la relazione: T : 360° =* $T_T$ *: 32', da cui si ricava:*

$$T_T = \frac{T\ \cdot 0°.533}{360°} \simeq 11.2\ s$$

**10.** Immaginiamo di trovarci sulla Luna esattamente al centro della faccia visibile dalla Terra. Sapendo che il periodo sinodico della Luna è di circa 29.5 giorni, ogni quanto tempo vedremo sorgere il Sole? Quando vedremo sorgere il Sole, in che fase è la Luna vista dalla Terra? Dalla stessa posizione, ogni quanto tempo vedremo sorgere la Terra?

**Soluzione**

*Il giorno lunare (che in analogia con la Terra possiamo definire come l'intervallo tra due passaggi consecutivi del Sole al meridiano, oppure come due configurazioni analoghe quali due albe consecutive) corrisponde al periodo delle fasi lunari, che vale in media 29.5 giorni. Dalla nostra posizione vedremo quindi il Sole sorgere in media una volta ogni 29.5 giorni. Se siamo su un punto al centro della faccia visibile della Luna e vediamo sorgere il Sole, dalla Terra la Luna sarà al "primo quarto". La faccia della Luna visibile da Terra è invece sempre rivolta verso la Terra, a causa della rotazione sincrona. Quindi la Terra apparirà immobile nel cielo della Luna, a parte piccoli effetti dovuti alle librazioni, e non la vedremo mai né sorgere né tramontare.*