Olimpiadi Italiane di Astronomia 2020

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Senior - Lezione 1

1. Sulla Terra, quanto dovrebbe durare un giorno siderale (in hh:mm:ss) affinché un corpo posto all'equatore risulti privo di peso?

Soluzione.
Affinché un corpo risulti privo di peso la somma dell'accelerazione di gravità $\boldsymbol{a_g}$ *e di quella centrifuga* $\boldsymbol{a_c}$ *deve essere pari a zero. All'equatore le due accelerazioni hanno stessa direzione, ma verso opposto. Si ha equilibrio quando:* $\boldsymbol{a_c} = -\boldsymbol{a_g}$*. Quindi considerando il modulo dei vettori:* $m\,\frac{v^2}{R_T} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T^2}$ $\quad ed\, essendo \quad v = \frac{2\,\pi\,R_T}{T}$ *ricaviamola durata del giorno:*

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot R_T^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.594 \cdot 10^{20}\,m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\,kg}}$$

2. Calcolate il peso di un corpo di massa M = 100 kg all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

Soluzione.
Detta $\boldsymbol{g}$ *l'accelerazione di gravità, il peso* $\boldsymbol{P}$ *di un corpo è la forza con cui il corpo è attratto dal pianeta, ovvero la forza di gravità che si esercita tra corpo e pianeta: P = m g. L' accelerazione di gravità e data dalla relazione:* $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ *e alla superficie di Mercurio e di Saturno vale:*

$$g_{Mercurio} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23}\,kg}{(2440 \cdot 10^3)^2\ m^2} \simeq 3.300\ \frac{m}{s^2}$$

$$g_{Saturno} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\,kg}{(60267 \cdot 10^3)^2\,m^2} \simeq 10.45\ \frac{m}{s^2}$$

In assenza di rotazione, il peso del corpo sarebbe quindi: $P_{Mercurio} \simeq 370\ N$, $P_{Saturno} \simeq 1045\ N$. *La forza centrifuga è data dalla relazione:* $F_c = m\,\frac{v^2}{R} = m\,\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2}$ *e all'equatore è diretta in senso opposto alla gravità. Per i due pianeti avremo:*

$$F_{cm} \simeq 100\ kg\ \frac{39.48\ \cdot 2440\ \cdot\ 10^3\ \ m}{25.67\ \cdot\ 10^{12}\ \ s^2} \simeq 3.75\ \cdot 10^{-4}\ N$$

$$F_{cs} \simeq 100\ kg\ \frac{39.48\ \cdot 60267\ \cdot\ 10^3\ \ m}{144.2\ \cdot\ 10^7\ s^2} \simeq 165\ \ N$$

Nel caso di Mercurio il peso resta praticamente invariato, mentre nel caso di Saturno il peso sarà: $P_{Saturno} = 1045\ N - 165\ N \simeq\ 880\ N$

3. Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra, che assumiamo perfettamente sferica, su un'orbita equatoriale circolare a una distanza d = 4325 km dalla superficie. Un osservatore lo vede passare al meridiano a mezzanotte. Dopo quanto tempo lo vedrà passare nuovamente al meridiano se: a) il satellite si muove da Ovest verso Est; b) il satellite si muove da Est verso Ovest ?

Soluzione.

*La distanza **D** del satellite dal centro della Terra vale: D = 6378 km + 4325 km = 10703 km. Possiamo ricavare il suo periodo di rivoluzione **T_s** dalla III legge di Keplero:*

$$T_s = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 D^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{39.478 \cdot 1.2261 \cdot 10^{21}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}} \simeq 11020\, s \simeq 3h\, 3m\, 40s$$

*I passaggi successivi del satellite al meridiano di un luogo avvengono a intervalli di tempo pari al suo periodo sinodico **S** riferito alla rotazione siderale della Terra (**T_T** ≃ 23h 56m 4s = 86164 s). Se il satellite si muove da Ovest verso Est, ovvero nello stesso senso della rotazione della Terra si ha:*

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_T} \quad \text{ovvero: } \quad \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{T_s \cdot T_T}}{|\boldsymbol{T_s - T_T}|} \quad \text{da cui ricaviamo: } S \simeq 12640\, s \simeq 3h\, 30m\, 40s$$

Se il satellite si muove da Est verso Ovest, ovvero nella direzione opposta della rotazione della Terra si ha:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_T} \quad \text{ovvero: } \quad \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{T_s \cdot T_T}}{|\boldsymbol{T_s + T_T}|} \quad \text{da cui ricaviamo: } S \simeq 9770\, s \simeq 2h\, 42m\, 50s$$

4. Si consideri una stella di neutroni con raggio di 15.0 km e massa pari al doppio di quella del Sole. Calcolare: la densità media della stella, l'accelerazione di gravità sulla sua superficie, la velocità di arrivo al suolo di un corpo che, partendo da fermo, cade da un'altezza h = 2 m dalla superficie, il tempo di caduta del corpo. Calcolare inoltre il peso sulla superficie della Terra di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni e le dimensioni di un cubo di ferro (ρ_{FE} = 7870 kg/m^3) con la stessa massa di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni.

Soluzione.

La densità media della stella di neutroni è data da:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\, M}{4\, \pi\, R^3} = \frac{3 \cdot 3.978 \cdot 10^{30}\, kg}{12.57 \cdot 3.375 \cdot 10^{12}\, m^3} \simeq 2.81 \cdot 10^{17}\, \frac{kg}{m^3} \simeq 2.81 \cdot 10^{11}\, \frac{kg}{cm^3}$$

L'accelerazione di gravità sulla sua superficie è data da:

$$a_g = \frac{G\, M}{R^2} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 3.978 \cdot 10^{30} kg}{225 \cdot 10^6\, m^2} \simeq 1.18 \cdot 10^{12}\, \frac{m}{s^2}$$

Assumendo costante l'accelerazione di gravità, la velocità di arrivo al suolo con partenza da fermo, vale:

$$v = \sqrt{2\, a_g\, h} = \sqrt{2 \cdot 1.18\, \frac{m}{s^2} \cdot 10^{12} \cdot 2\, m} \simeq 2.17 \cdot 10^6\, \frac{m}{s} = 2.17 \cdot 10^3\, \frac{km}{s}$$

Il tempo della caduta è dato dalla relazione:

$$t = \sqrt{\frac{2\, h}{a}} = \sqrt{\frac{4\, m}{1.18 \cdot 10^{12}\, \frac{m}{s^2}}} \simeq 1.84 \cdot 10^{-6}\, s$$

La massa di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni vale: $M = V\, \rho \simeq 2.81 \cdot 10^{11}\, kg$, *il suo peso sulla superficie della Terra è:*

$$P = M\, a_g \simeq 2.81 \cdot 10^{11}\, kg \cdot 9.807\, \frac{m}{s^2} \simeq 27.6 \cdot 10^{11}\, N$$

Poiché 1 m^3 *di ferro ha una massa di 7870 kg, per avere una massa* $M_{FE} = 2.81 \cdot 10^{11}\, kg$, *avremo bisogno di un cubo con lato:* $L = \sqrt[3]{\frac{2.81 \cdot 10^{11}\, kg}{7870\, \frac{kg}{m^3}}} \simeq 329\, m$

5. La Luna si allontana dalla Terra a una velocità $V_a \sim 3.8$ cm/anno. Tra quanto tempo non sarà più possibile osservare eclissi totali di Sole ?

Soluzione.

Le eclissi totali di Sole non avranno più luogo quando il diametro apparente della Luna al perielio (D_{PLuna}) sarà minore del diametro apparente del Sole all'afelio ($D_{A\odot}$). La dimensione angolare del Sole all'afelio è data dalla relazione:

$$D_{A\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_\odot}{d_{A\odot}}\right) \simeq 31'.44$$

La distanza (d_{FE}) dalla quale il disco lunare sottende un angolo α = 31'.44 (ovvero il raggio lunare sottende un angolo di 15'.72), è data da:

$$d_{FE} = \frac{2\, R_{Luna}}{\sin\alpha} \simeq \frac{3476\ km}{\sin 0°.524} \simeq 380.1 \cdot 10^3\ km$$

La distanza attuale della Luna al perigeo ***d_P*** *vale: $d_p = a_{Luna}\,(1\text{-}e) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$. Detta* ***Va*** *la velocità di allontanamento il tempo* ***T*** *necessario affinché la distanza della Luna al perigeo diventi uguale a d_{FE} è data da:*

$$T = \frac{d_{FE} - d_p}{V_a} \simeq \frac{380.1 \cdot 10^8\ cm - 363.3 \cdot 10^8\ cm}{3.8\ \frac{cm}{s}} \simeq \frac{16.8 \cdot 10^8\ cm}{3.8\ \frac{cm}{s}} \simeq 440 \cdot 10^6\ anni$$

Nota: *nella soluzione si assume che la velocità di allontanamento, le eccentricità dell'orbita lunare e dell'orbita della Terra e il raggio del Sole rimangano costanti; considerando le loro variazioni si stima che le eclissi totali di Sole non saranno più osservabili dalla Terra tra ~ 600 · 10^6 anni.*

6. L'asteroide Pallas ha un raggio medio R = 512 km, l'accelerazione di gravità alla sua superficie vale: g = 0.210 m/s^2. Calcolare la densità dell'asteroide in kg/m^3 e in g/cm^3 e la sua velocità di fuga. Calcolare la velocità (v_i) di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza h = 800 km dalla superficie.

Soluzione.

L'asteroide ha un volume pari a: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq 56.2 \cdot 10^7\ km^3 = 56.2 \cdot 10^{16}\ m^3$, ed essendo nota l'accelerazione di gravità alla sua superficie ricaviamo la massa:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} \simeq \frac{0.210\ \frac{m}{s^2} \cdot 2.62 \cdot 10^{11}\ m^2}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}} \simeq 8.24 \cdot 10^{20}\ kg$$

e la densità è quindi:

$$\rho = \frac{M}{V} \simeq \frac{8.24 \cdot 10^{20}\ kg}{56.2 \cdot 10^{16}\ m^3} \simeq 1470\ \frac{kg}{m^3} = 1.47\ \frac{g}{cm^3}$$

La velocità di fuga dall'asteroide vale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20}\ kg}{512000\ m}} \simeq 463\ \frac{m}{s} = 0.463\ \frac{km}{s}$$

La distanza da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni dell'asteroide. Dalla conservazione dell'energia meccanica posto H = h + R = 1312 km ed essendo la velocità iniziale v_0 = 0, si avrà:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_i^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

Da cui :

$$v_i = \sqrt{2\,G\,M\left(\frac{H-R}{HR}\right)} \simeq \sqrt{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 8.24 \cdot 10^{20} kg \left(\frac{800 \cdot 10^3\ m}{1312 \cdot 10^3\ m \cdot 512 \cdot 10^3\ m}\right)} \simeq 362\ \frac{m}{s}$$

7. Un orso può correre a una velocità massima v = 9 m/s. Calcolare le dimensioni minime di un corpo di forma sferica della fascia di Kuiper dal quale un orso non potrebbe sfuggire.

Soluzione.
La velocità minima per cui l'orso può staccarsi dalla superficie senza più ricadere è la prima velocità cosmica: $V_i = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$, *che porterà l'orso in orbita circolare intorno all'asteroide.*

Detta ρ *la densità del corpo il corrispondente raggio* r_1 *dell'asteroide vale:* $r_1 = \sqrt{\frac{3\,V_i^2}{4\,\pi\,G\,\rho}}$

La densità dell'asteroide non è data, tuttavia è noto che i corpi della fascia di Kuiper sono composti per la quasi totalità di ghiaccio e quindi possiamo assumere: $\rho \simeq 920\ \frac{kg}{m^3}$ *e per* r_1 *avremo:*

$$r_1 = \sqrt{\frac{3\,V_i^2}{4\,\pi\,G\,\rho}} \simeq \sqrt{\frac{3\cdot 81\,\frac{m^2}{s^2}}{4\,\pi\cdot 6.674\cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 920\,\frac{kg}{m^3}}} \simeq 17.7\ km$$

Per allontanarsi indefinitamente dall'asteroide occorre considerare la seconda velocità cosmica (o velocità di fuga) $V_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}}$, *da cui si ricava il corrispondente raggio* r_2 *dell'asteroide:*

$$r_2 = \sqrt{\frac{3\,V_i^2}{8\,\pi\,G\,\rho}} \simeq \sqrt{\frac{3\cdot 81\,\frac{m^2}{s^2}}{8\,\pi\cdot 6.674\cdot 10^{-11}\cdot\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 920\,\frac{kg}{m^3}}} \simeq 12.5\ km$$

Quindi se l'asteroide ha un raggio minore di 12.5 km l'orso potrà sfuggire da esso. Se il raggio dell'asteroide è maggiore di 12.5 km ma minore di 17.7 km, l'orso potrà entrare in orbita intorno all'asteroide. Se infine il raggio dell'asteroide è maggiore di 17.7 km l'orso finirà comunque per ricadere sulla superficie.
Nota: *la soluzione numerica di questo problema dipende dalla densità assunta per il corpo su cui si trova l'orso. Ogni assunzione di densità diversa da quella indicata qui, purchè motivata, è stata considerata corretta.*

8. Determinare il semiasse maggiore dell'orbita di un asteroide che, osservato dalla Terra, ha un periodo sinodico pari al suo periodo siderale. Quanto possono valere, al massimo, l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole all'afelio?

Soluzione.
Le relazioni che legano il Periodo Sinodico ***S*** *di un corpo del Sistema Solare osservato dalla Terra con il suo Periodo Siderale* ***P*** *e con il Periodo Siderale della Terra* ***E*** *sono:*

$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P}$ *per un corpo con periodo orbitale maggiore di quello della Terra*

$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E}$ *per un corpo con periodo orbitale minore di quello della Terra*

Da cui ricaviamo rispettivamente: $\frac{1}{S} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E}$ *e* $\frac{1}{S} - \frac{1}{P} = -\frac{1}{E}$

Se S = P notiamo che l'asteroide non può avere periodo orbitale minore di quello della Terra; varrà allora solo la relazione:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E} \qquad \text{da cui: } \frac{1}{P} + \frac{1}{P} = \frac{1}{E} \qquad \text{e infine: } P = 2E = 2 \text{ anni}$$

Noto il periodo siderale ricaviamo il semiasse maggiore ***a*** *dell'orbita dalla III legge di Keplero:*

$$a = \sqrt[3]{P^2} \simeq 1.587\ UA \simeq 237.4\cdot 10^6\ km$$

Per ricavare la massima distanza all'afelio D_A *calcoliamo l'eccentricità massima dell'orbita, considerando che la distanza al perielio* D_P *non può essere minore del raggio del Sole.*

$$D_p = R_\odot = a\,(1-e) \quad \text{da cui: } e = 1 - \frac{R_\odot}{a} \simeq 1 - \frac{695500\ km}{237.4\cdot 10^6\ km} \simeq 0.9971$$

Si avrà infine: $D_A = a\,(1+e) \simeq 474.1\cdot 10^6\ km$

Nota: *nella realtà un asteroide non può avvicinarsi al Sole a una distanza così piccola. Per calcolare un valore approssimato della distanza minima si veda la nota alla fine del problema 10.*

9. Un corpo di piccola massa viene lanciato radialmente dalla superficie di un pianeta, che assumiamo perfettamente sferico, con una velocità pari alla metà della velocità di fuga. Calcolare a che distanza dal centro del pianeta la velocità del corpo si annulla. Trovate una relazione che leghi il rapporto tra la velocità iniziale del corpo e quella di fuga con l'altezza raggiunta.

Soluzione.
*Scriviamo la legge di conservazione dell'energia meccanica indicando con **R** il raggio del pianeta di massa **M**, con **m** la massa del corpo e con **H** la distanza dal centro del pianeta in cui la velocità del corpo si annulla. Poiché la velocità di fuga è data dalla relazione* $v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$*, avremo:*

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\right)^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{G\,M\,m}{R} - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui ricaviamo: $\frac{1}{4\,R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$ *ovvero:* $-\frac{3}{4R} = -\frac{1}{H}$ *e infine:* $H = \frac{4}{3}\,R$

Indichiamo con K il rapporto tra la velocità con cui viene lanciato il corpo e la velocità di fuga:

$$K = \frac{v}{v_f} \qquad \text{con: } 0 \le v \le v_f$$

La legge di conservazione dell'energia meccanica assume la forma:

$$\frac{1}{2}\,m\left(K\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\right)^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui ricaviamo: $\frac{K^2}{R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$ *e infine:* $H = \frac{R}{1-K^2}$

Per K = ½ otteniamo il valore: $H = \frac{4}{3}\,R$*, se invece v = 0 avremo K = 0 e quindi H=R, mentre se* $v = v_f$ *avremo K =1 e il corpo raggiungerà una distanza infinita dal pianeta.*

10. Si consideri una cometa con un nucleo di forma approssimativamente sferica e raggio $R_C = 2\ km$ e con densità media $\rho_C = 500\ kg/m^3$ in avvicinamento al pianeta Giove. Si calcoli, approssimativamente, a quale distanza dalla superficie di Giove le forze mareali cominceranno a disgregare il nucleo della cometa.

Soluzione.
Calcoliamo il limite di Roche di Giove, il cui valore dipende anche dalla natura del corpo in avvicinamento. La cometa in esame è un corpo poco compatto, come indicato dalla sua densità pari a metà di quella dell'acqua. La massa della cometa vale:

$$M_C = \rho_C\,\frac{4}{3}\pi\,{R_C}^3 \simeq 500\,\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\,(2000)^3\,m^3 \simeq 1.68\cdot 10^{13}\,kg$$

Per una cometa una buona approssimazione del limite di Roche è dato dalla relazione:

$$\mathrm{d} \approx 2.44\ \mathrm{r_{cometa}}\sqrt[3]{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}} \approx 1.51\sqrt[3]{\frac{\mathrm{M}}{\rho_\mathrm{m}}} \approx 2.44\ \cdot 2\ \mathrm{km}\sqrt[3]{\frac{1.899\cdot 10^{27}\,kg}{1.68\cdot 10^{13}\,kg}} \approx 1.51\sqrt[3]{\frac{1.899\cdot 10^{27}\,kg}{500\,kg/m^3}} \approx 23.6\cdot 10^4\,km$$

Il valore trovato è:

$d \approx 3.3\,R_{Giove}$ *e quindi la distanza cercata è:* $D = d - R_G \approx 2.3\,R_{Giove} \approx 16.5\cdot 10^4\,km$

Nota al problema 8.
Per rispondere in modo più accurato alla seconda parte del problema, stimiamo la distanza al perielio a cui può avvicinarsi l'asteroide senza essere distrutto dalle forze mareali dovute al Sole.

Poiché il problema non fornisce le caratteristiche dell'asteroide assumiamo per la sua densità quella ricavata nel problema 7 per Pallas: $\rho \simeq 1470\ \frac{kg}{m^3} = 1.47\ \frac{g}{cm^3}$

Utilizzando, in prima approssimazione, l'espressione usata per la cometa, la minima distanza del perielio dell'asteroide sarà:

$$d_{p-asteroide} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M_{Sole}}{\rho_m}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{1470\ \frac{kg}{m^3}}} \approx 1.67 \cdot 10^6\ km \approx 2.4\ R_{Sole}$$

Per ricavare l'eccentricità dell'orbita e la massima distanza all'afelio assumiamo $\boldsymbol{D_P} \approx 1.67 \cdot 10^6\ km$*:*

$$e = 1 - \frac{D_P}{a} \approx 1 - \frac{1.67 \cdot 10^6\ km}{237.4 \cdot 10^6\ km} \approx 0.993$$

$$D_A = a\ (1+e) \approx 473.1 \cdot 10^6\ km$$