Olimpiadi Italiane di Astronomia 2020

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Junior 1 - Lezione 1

1. Il Sole ruota intorno al centro della Galassia, da cui dista circa 8.34 kpc, con una velocità tangenziale $v_T \simeq 220$ km/s. Quale distanza, in km e in UA, percorre in un anno? Dopo quanto tempo avrà percorso un anno luce? (nota: per percorsi piccoli rispetto alle dimensioni della Galassia la traiettoria si può approssimare a una retta). Quanto tempo impiega il Sole per compiere una rivoluzione completa attorno al centro della Galassia? Supponendo che il periodo di rivoluzione sia rimasto invariato, quante rivoluzioni complete intorno al centro galattico ha effettuato il Sole fino a oggi?

Soluzione.
Un anno siderale vale: 365.26 giorni $\simeq 31558 \cdot 10^3\, s$*. La distanza percorsa dal Sole in un anno è: D = v · t = 220* $\cdot 31558 \cdot 10^3 \simeq$ *6.94 ·* 10^9 *km* $\simeq$ *46.4 UA. Poiché 1 anno luce = 63242 UA, per percorrere un anno luce il Sole impiega* $T = \frac{63242\, UA}{46.4 \frac{UA}{anno}} \simeq 1360\, anni$*. La lunghezza dell'orbita del Sole attorno al centro galattico vale: C =* $2\,\pi\, r = 2\,\pi \cdot 8.34 \cdot 10^3\, pc \simeq$ *1.61 ·* 10^{18} *km. Per compiere una rivoluzione completa (Anno Galattico o Anno Cosmico) occorre quindi un tempo:* $T_r = \frac{C}{v} = \frac{1.61 \cdot 10^{18}\, km}{220 \frac{km}{s}} \simeq$ *7.34 ·* 10^{15} *s* $\simeq$ *233 ·* 10^6 *anni. L'età del Sole è di circa 4.57 ·* 10^9 *anni e quindi ha completato quasi 20 orbite attorno al centro galattico. Nota: poiché la distanza dal Sole dal centro galattico e la sua velocità orbitale non sono ancora ben note, le stime per la durata dell'Anno Galattico oscillano tra 215 e 250 milioni di anni.*

2. Sulla Terra, quanto dovrebbe durare un giorno siderale (in hh:mm:ss) affinché un corpo posto all'equatore risulti privo di peso?

Soluzione.
Affinché un corpo risulti privo di peso la somma dell'accelerazione di gravità $\boldsymbol{a_g}$ *e di quella centrifuga* $\boldsymbol{a_c}$ *deve essere pari a zero. All'equatore le due accelerazioni hanno stessa direzione, ma verso opposto. Si ha equilibrio quando:* $\boldsymbol{a_c} = -\boldsymbol{a_g}$*. Quindi considerando il modulo dei vettori:* $m\, \frac{v^2}{R_T} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T^2}$ $\quad ed\ essendo \quad v = \frac{2\,\pi\, R_T}{T}$ *ricaviamola durata del giorno:*

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot R_T^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.594 \cdot 10^{20}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}} \simeq 5069\, s = 1h\, 24m\, 29s$$

3. La forza di gravità che si esercita tra due corpi è di F = 10^4 N. Il primo ha raggio R_1 = 30.2 km e densità ρ_1 = 1.42 g/cm^3, il secondo ha raggio R_2 = 15.1 km e densità ρ_1 = 3.44 g/cm^3. A che distanza si trovano i due corpi ?

Soluzione.
Le densità dei due corpi valgono: $\rho_1 = 1.42\, \frac{g}{cm^3} = 1.42 \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3}$*;* $\rho_2 = 3.44\, \frac{g}{cm^3} = 3.44 \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3}$ *.*
Essendo M = ρ *V, ricaviamo:*

$$M_1 = \rho\, \frac{4}{3}\, \pi\, {R_1}^3 \cong 1.42 \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3}\, \pi \cdot 2.75 \cdot 10^{13}\, m^3 \cong 1.64 \cdot 10^{17}\, kg$$

$$M_2 = \rho \frac{4}{3} \pi R_2^{\,3} \cong 3.44 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3.44 \cdot 10^{12}\, m^3 \cong 4.96 \cdot 10^{16}\, kg$$

Nota la forza, ricaviamo la distanza tra i due corpi dalla legge di Gravitazione universale:

$$d = \sqrt{\frac{G\, M_1\, M_2}{F}} \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 1.64 \cdot 10^{17}\, kg \cdot 4.96 \cdot 10^{16}\, kg}{10^4 \frac{kg}{m\, s^2}}} \simeq 7.37 \cdot 10^9\, m \simeq 7.37 \cdot 10^6\, km$$

4. Calcolate il peso di un corpo di massa M = 100 kg all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superficie solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

Soluzione.

*Detta **g** l'accelerazione di gravità, il peso **P** di un corpo è la forza con cui il corpo è attratto dal pianeta, ovvero la forza di gravità che si esercita tra corpo e pianeta: P = m g. L' accelerazione di gravità e data dalla relazione:* $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ *e alla superficie di Mercurio e di Saturno vale:*

$$g_{Mercurio} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 3.301 \cdot 10^{23}\, kg}{(2440 \cdot 10^3)^2\, m^2} \simeq 3.300 \frac{m}{s^2}$$

$$g_{Saturno} \simeq \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.685 \cdot 10^{26}\, kg}{(60267 \cdot 10^3)^2\, m^2} \simeq 10.45 \frac{m}{s^2}$$

In assenza di rotazione, il peso del corpo sarebbe quindi: $P_{Mercurio} \simeq 370$ *N,* $P_{Saturno} \simeq 1045$ *N. La forza centrifuga è data dalla relazione:* $F_c = m \frac{v^2}{R} = m \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2}$ *e all'equatore è diretta in senso opposto alla gravità. Per i due pianeti avremo:*

$$F_{cm} \simeq 100\, kg \frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3\, m}{25.67 \cdot 10^{12}\, s^2} \simeq 3.75 \cdot 10^{-4}\, N$$

$$F_{cs} \simeq 100\, kg \frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3\, m}{144.2 \cdot 10^7\, s^2} \simeq 165\, N$$

Nel caso di Mercurio il peso resta praticamente invariato, mentre nel caso di Saturno il peso sarà: $P_{Saturno} = 1045\, N - 165\, N \simeq 880\, N$

5. Un pianeta di massa M = $1.6 \cdot 10^{26}$ kg, si muove attorno a una stella su un orbita il cui semiasse maggiore è di 9.00 UA con un periodo di 20.0 anni. Calcolare la massa (in kg e in unità di masse solari) e il raggio (in km e in unità del raggio solare) della stella, sapendo che l'accelerazione di gravità sulla fotosfera della stella è 54 volte quella sulla superficie della Terra.

Soluzione.

Trascurando la massa del pianeta, ricaviamo la massa della stella dalla III legge di Keplero:

$$M_{stella} = \frac{4\, \pi^2\, a^3}{G\, T^2} \simeq \frac{39.48 \cdot 2.44 \cdot 10^{36}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 3.98 \cdot 10^{17}\, s^2} \simeq 3.63 \cdot 10^{30}\, kg \simeq 1.82\, M_{Sole}$$

Il raggio della stella è dato dalla relazione:

$$R_{stella} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{stella}}{54 \cdot g_{Terra}}} \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 3.63 \cdot 10^{30}\, kg}{54 \cdot 9.807 \frac{m}{s^2}}} \simeq 6.76 \cdot 10^5\, km \simeq 0.973\, R_{Sole}$$

Nota: l'assunzione iniziale $M_{pianeta}$ trascurabile rispetto a quella, non ancora nota, della stella, risulta giustificata in quanto sappiamo, dallo studio della struttura ed evoluzione stellare, che la massa minima di una stella è: $M_{minima\ stella} \geq 0.08 \cdot M_{Sole} \simeq 1.59 \cdot 10^{29}\ kg \simeq 1000\ M_{pianeta}$

6. La stella Kepler-101 ha due pianeti, Kepler-101b e Kepler-101c. Calcolare l'accelerazione di gravità alla superficie dei due pianeti, sapendo che Kepler-101b ha un raggio $R_b = 0.520 \cdot R_{Giove}$ e una massa $M_b = 51.0 \cdot M_{Terra}$ e che Kepler-101c ha un raggio $R_c = 1.23 \cdot R_{Terra}$ e una massa $M_c = 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot M_{Giove}$. A quale altezza dalla superficie di Kepler-101c si avrà un'accelerazione di gravità pari a quella sulla superficie di Kepler-101b?

Soluzione.
L'accelerazione di gravità è data dalla relazione: $g = G\frac{M}{R^2}$ e per i due pianeti vale:

$$g_b = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 51.0 \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}{(0.520 \cdot 71490 \cdot 3)^2\ m^2} \simeq 14.7\ \frac{m}{s^2}$$

$$g_c = \frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-2} \cdot 1.899 \cdot 10^{27} kg}{(1.23 \cdot 6378 \cdot 10^3)^2\ m^2} \simeq 24.7\ \frac{m}{s^2}$$

L'altezza **h** sulla superficie di Kepler-101c per cui si ha $g_{ch} \simeq 14.7\ \frac{m}{s^2}$ si ottiene dalla relazione:

$g_{ch} = G\frac{M_c}{(R_c+h)^2}$; da cui:

$$h = \sqrt{\frac{G\ M_c}{g_{ch}}} - R_c \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 2.279 \cdot 10^{25}\ kg}{14.7\ \frac{m}{s^2}}} - 7.84 \cdot 10^6\ m \simeq 2330\ km$$

7. Calcolate la velocità al perielio di un asteroide con periodo orbitale P = 517.9 giorni ed eccentricità dell'orbita e = 0.2080

Soluzione.
Esprimendo il periodo in anni possiamo ricavare il semiasse maggiore dell'orbita dalla relazione:

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{517.9}{365.26}\right)^2} \simeq \sqrt[3]{1.418^2} \simeq 1.262\ UA \simeq 188.8 \cdot 10^6\ km$$

La velocità media lungo l'orbita (v_m) e la velocità al perielio (v_p) sono date dalle relazioni:

$$v_m = \sqrt{\frac{G\ M_\odot}{a}} \simeq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\ kg}{188.8 \cdot 10^9\ m}} \simeq 26.52\ \frac{km}{s}$$

$$v_p = v_m \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \simeq 26.52\ \frac{km}{s} \sqrt{\frac{1.2080}{0.7920}} \simeq 32.75\ \frac{km}{s}$$

8. Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra, che assumiamo perfettamente sferica, su un'orbita equatoriale circolare a una distanza d = 4325 km dalla superficie. Un osservatore lo vede passare al meridiano a mezzanotte. Dopo quanto tempo lo vedrà passare nuovamente al meridiano se: a) il satellite si muove da Ovest verso Est; b) il satellite si muove da Est verso Ovest ?

Soluzione.
*La distanza **D** del satellite dal centro della Terra vale: D = 6378 km + 4325 km = 10703 km. Possiamo ricavare il suo periodo di rivoluzione T_s dalla III legge di Keplero:*

$$T_s = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 D^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{39.478 \cdot 1.2261 \cdot 10^{21}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}} \simeq 11020\, s \simeq 3h\, 3m\, 40s$$

*I passaggi successivi del satellite al meridiano di un luogo avvengono a intervalli di tempo pari al suo periodo sinodico **S** riferito alla rotazione siderale della Terra ($T_T \simeq$ 23h 56m 4s = 86164 s). Se il satellite si muove da Ovest verso Est, ovvero nello stesso senso della rotazione della Terra si ha:*

$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_T}$ *ovvero:* : $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{T_s \cdot T_T}}{|\boldsymbol{T_s - T_T}|}$ da cui ricaviamo: $S \simeq 12640\, s \simeq 3h\, 30m\, 40s$

Se il satellite si muove da Est verso Ovest, ovvero nella direzione opposta della rotazione della Terra si ha:

$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_S} + \frac{1}{T_T}$ *ovvero:* : $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{T_s \cdot T_T}}{|\boldsymbol{T_s + T_T}|}$ da cui ricaviamo: $S \simeq 9770\, s \simeq 2h\, 42m\, 50s$

9. La stella ε Eri si trova a 10.5 anni luce dal Sole e intorno a essa ruota un pianeta, ε Eri b, che percorre un'orbita il cui semiasse maggiore vale 3.39 UA. Si calcoli la parallasse annua di ε Eri vista dalla Terra e la parallasse annua del Sole visto da ε Eri b. A quanto corrisponde un pc misurato da ε Eri b ?

Soluzione.

La parallasse annua, in arcsec, è pari all'inverso della distanza in parsec. Dalla Terra 1 parsec ≃ 3.2616 anni luce. Quindi ε Eri si trova a una distanza D = 3.22 parsec e la sua parallasse vale:

$$\pi_{\varepsilon\text{-}Eri} \simeq \frac{1}{3.22} \simeq 0.311''$$

Per calcolare la parallasse del Sole visto da ε Eri b, dobbiamo considerare che la parallasse dipende dalle dimensioni della base, ovvero dal semiasse maggiore dell'orbita. Tanto maggiore è la base, tanto maggiore, a parità di distanza di una stella, sarà la sua parallasse. Dato che ε Eri b dista da ε Eri 3.39 UA, la parallasse misurata per il Sole sarà, poiché stiamo considerando angoli molto piccoli, semplicemente 3.39 volte quella misurata dalla Terra:

$$\pi_S \simeq 0.311 \cdot 3.39 = 1.05''$$

Anche la conversione tra parsec, definiti con osservazioni dalla Terra e da ε Eri b, subirà la stessa correzione, quindi:

1 parsec di ε Eri b ≃ 3.39 parsec terrestri

10. Determinare il semiasse maggiore dell'orbita di un asteroide che, osservato dalla Terra, ha un periodo sinodico pari al suo periodo siderale. Quanto possono valere, al massimo, l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole all'afelio?

Soluzione.

*Le relazioni che legano il Periodo Sinodico **S** di un corpo del Sistema Solare osservato dalla Terra con il suo Periodo Siderale **P** e con il Periodo Siderale della Terra **E** sono:*

$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{S}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{E}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{P}}$ *per un corpo con periodo orbitale maggiore di quello della Terra*

$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{S}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{P}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{E}}$ *per un corpo con periodo orbitale minore di quello della Terra*

Da cui ricaviamo rispettivamente: $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{S}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{E}}$ *e* $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{S}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{P}} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{E}}$

Se S = P notiamo che l'asteroide non può avere periodo orbitale minore di quello della Terra; varrà allora solo la relazione:

$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{S}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{E}}$ *da cui:* $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{P}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{E}}$ *e infine: P = 2E = 2 anni*

*Noto il periodo siderale ricaviamo il semiasse maggiore **a** dell'orbita dalla III legge di Keplero:*

$$a = \sqrt[3]{P^2} \simeq 1.587\ UA \simeq 237.4 \cdot 10^6\ km$$

*Per ricavare la massima distanza all'afelio **D_A** calcoliamo l'eccentricità massima dell'orbita, considerando che la distanza al perielio **D_P** non può essere minore del raggio del Sole.*

$$D_p = R_\odot = a\,(1\text{-}e) \quad \text{da cui: } e = 1 - \frac{R_\odot}{a} \simeq 1 - \frac{695500\ km}{237.4 \cdot 10^6\ km} \simeq 0.9971$$

Si avrà infine: $D_A = a\,(1+e) \simeq 474.1 \cdot 10^6\ km$

***Nota:** nella realtà un asteroide non può avvicinarsi al Sole a una distanza così piccola a causa delle forze "mareali". Per calcolare un valore approssimato più realistico della distanza minima sono però necessarie nozioni che non fanno parte del syllabus della categoria Junior 1*