



OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2017

Finale Nazionale - 5 Aprile

Prova Teorica - Categoria Senior

1. Le stelle di Cassiopea

Nella seguente tabella trovate la magnitudine (m) visuale e la distanza (D) in anni luce delle cinque stelle più brillanti della costellazione Cassiopea (Cas). Completare la tabella calcolando le magnitudini assolute e identificare le due stelle che sono intrinsecamente la più e la meno luminosa. Calcolare infine la luminosità di tutte le stelle in rapporto a quella del Sole.

Stella	m	D	M	L/L_{\odot}
α Cas	2.21	229		
β Cas	2.25	54.5		
γ Cas	2.12	615		
δ Cas	2.65	99.4		
ε Cas	3.34	444		

Soluzione.

Stella	m	D	M	L/L_{\odot}
α Cas	2.21	229	-2.02	550
β Cas	2.25	54.5	1.13	30
γ Cas	2.12	615	-4.26	4325
δ Cas	2.65	99.4	0.23	69
ε Cas	3.34	444	-2.33	731

Esprimendo la distanza (D) in parsec, la magnitudine assoluta (M) è legata alla magnitudine apparente (m) dalla relazione: $M = m + 5 - 5 \log D$. Quindi la stella intrinsecamente più luminosa tra quelle elencate è γ Cas, mentre la meno luminosa è β Cas.

Infine, considerando le magnitudini assolute, vale la relazione $M - M_{\odot} = -2.5 \log \frac{L}{L_{\odot}}$

Da cui si ricava: $\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{\left(\frac{M_{\odot} - M}{2.5}\right)}$ ed essendo $M_{\odot} = 4.83$ (Tabella 1), si possono calcolare i valori di L/L_{\odot} .

2. L'esplosione di un pianeta

Nel film *Il pianeta proibito* (1956), i protagonisti scappano da un pianeta dopo aver attivato un sistema che ne provocherà l'esplosione dopo 24 ore. Se l'astronave con cui fuggono viaggia a 0.18 volte la velocità della luce, a che distanza si troveranno dal pianeta quando lo vedranno esplodere? Assumendo per il pianeta lo stesso diametro della Terra, calcolare il suo diametro angolare visto dagli astronauti un istante prima dell'esplosione.

Soluzione. Lo spazio percorso dalla navicella dopo l'esplosione del pianeta è dato dalla relazione: $s_N = s_0 + v_n \cdot t$ (con $s_0 = v_n \cdot 24 \text{ h} = 0.18 \cdot c \cdot 86400 = 46.6 \cdot 10^8 \text{ km}$), mentre quello percorso dalla luce è: $s_L = c \cdot t$.

Quando la luce prodotta dall'esplosione raggiungerà la navicella avremo $s_N = s_L$, il che avviene a un tempo:

$$t = 24 \text{ h} + \frac{s_0}{c - v_n} = 86400 + \frac{46.6 \cdot 10^8}{245829} = 105356 \text{ s} (\cong 29 \text{ h } 16 \text{ m})$$

ovvero quando l'astronave si troverà a una distanza dal pianeta $D \cong 56.9 \cdot 10^8 \text{ km} \cong 38 \text{ UA}$.

Il diametro angolare (α) del pianeta da una distanza (D) di 38 UA è dato dalla relazione:

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1} \frac{R}{D} = 2 \cdot \sin^{-1} \frac{6378}{5.684 \cdot 10^9} = 0''.46$$

3. Una stella... all'altezza

La precessione degli equinozi è la variazione dell'orientamento dell'asse di rotazione terrestre la cui proiezione sulla sfera celeste descrive un'immaginaria circonferenza in circa 25800 anni. Nel 2100 la proiezione dell'asse terrestre sulla sfera celeste arriverà alla minima distanza da quella che chiamiamo

“Stella Polare”, che avrà declinazione $\delta_{\text{Polare}_{2100}} = +89^\circ 32'$, mentre nel 2800 A.C. si trovava alla minima distanza da Thuban (= α Draconis) che aveva $\delta_{\text{Thuban}_{-2800}} = +89^\circ 48'$. Considerando che nell'anno 2000 le declinazioni delle due stelle erano, rispettivamente, $\delta_{\text{Polare}_{2000}} = +89^\circ 16'$ e $\delta_{\text{Thuban}_{2000}} = +64^\circ 22'$, calcolare l'altezza massima sull'orizzonte di quella che oggi chiamiamo “Stella Polare” nel 2800 A.C. per un osservatore posto a Cremona ($\varphi = +45^\circ 8'$), trascurando gli effetti del moto proprio delle due stelle.

Soluzione: L'altezza sull'orizzonte del polo celeste è pari alla latitudine del luogo di osservazione. L'altezza massima di una stella sull'orizzonte si ha in corrispondenza al suo passaggio al meridiano in direzione sud. La distanza in declinazione tra le due stelle, che rimane fissa nel tempo, vale: $\Delta\delta = 24^\circ 54'$, con la “Stella Polare” che nel 2800 A.C. “girava” intorno a Thuban, che si trovava a $12'$ dal polo celeste. L'altezza massima sull'orizzonte della “Stella Polare” nel 2800 A.C. valeva quindi: $h_{\text{max}} = 45^\circ 8' + 12' + 24^\circ 54' = 70^\circ 14'$.

4. Il gigante lontano

In un articolo dal titolo “Evidence for a distant giant planet in the Solar System” apparso il 20 gennaio 2016, due ricercatori ipotizzano l'esistenza di un pianeta gigante ai confini del Sistema Solare. Tale oggetto, secondo i loro calcoli, dovrebbe percorrere un'orbita piuttosto eccentrica ($e = 0.6$) con semiasse maggiore $a = 700$ UA e possedere una massa pari a circa 10 masse terrestri. Supponendo che la densità di tale oggetto sia pari a quella di Nettuno e che la sua superficie rifletta l'80% della luce visibile proveniente dal Sole, calcolare:

- 1) il periodo orbitale del pianeta;
- 2) la sua distanza dal Sole al perielio e all'afelio;
- 3) la dimensione angolare del pianeta al perielio e all'afelio visto dal Sole;
- 4) la magnitudine visuale osservata dalla Terra quando il pianeta è in opposizione e la sua distanza dal Sole è di 700 UA.

Soluzione:

1) Il periodo orbitale del pianeta si ricava dalla III Legge di Keplero: $T(\text{anni}) = \sqrt{(700 \text{ UA})^3} \cong 18520$ anni.

2) Le distanze dal Sole, al perielio e all'afelio, sono date da:

$$d_a = 700 \cdot (1 + 0.6) = 1120 \text{ UA} = 16.76 \cdot 10^{10} \text{ km}$$

$$d_p = 700 \cdot (1 - 0.6) = 280 \text{ UA} = 41.89 \cdot 10^9 \text{ km}$$

3) Per calcolare le dimensioni angolari all'afelio e al perielio, dobbiamo calcolare il diametro del pianeta. La massa M del pianeta può essere scritta in termini del suo raggio R e della sua densità ρ :

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

Dai dati del problema sappiamo che la densità del pianeta è pari a quella di Nettuno, ovvero:

$$M_{\text{Nettuno}} = \frac{4}{3} \pi R_{\text{Nettuno}}^3 \rho, \quad \text{da cui si ha: } \rho = \frac{M_{\text{Nettuno}}}{\frac{4}{3} \pi R_{\text{Nettuno}}^3}$$

e che la massa del pianeta è dieci volte la massa della Terra, ovvero $M = 10 \cdot M_{\text{Terra}}$.

Sostituendo, si ricava:

$$10 \cdot M_{\text{Terra}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{M_{\text{Nettuno}}}{\frac{4}{3} \pi R_{\text{Nettuno}}^3} = \frac{M_{\text{Nettuno}}}{R_{\text{Nettuno}}^3} R^3$$

da cui:

$$R = R_{\text{Nettuno}} \sqrt[3]{10 \frac{M_{\text{Terra}}}{M_{\text{Nettuno}}}} = 20716 \text{ km}$$

Il diametro del pianeta è dunque $D = 2R = 41432$ km. All'afelio e al perielio, il diametro angolare, considerando che $D \ll d$, sarà rispettivamente:

$$\vartheta_{\text{afelio}} = \arctan \frac{D}{d_a} = 0.051'' \quad \vartheta_{\text{perielio}} = \arctan \frac{D}{d_p} = 0.204''$$

- 4) Per calcolare la magnitudine visuale nella condizione descritta, dobbiamo sapere quale è il flusso di radiazione solare alla distanza di 700 UA (= $1.047 \cdot 10^{11}$ km). Ricaviamo dapprima la luminosità solare (ovvero la potenza radiativa totale emessa dalla superficie del Sole):

$$P = 4 \pi R_{\odot}^2 \sigma T^4 = 3.84 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Il flusso a 1 AU sarà allora pari a:

$$F_1 = \frac{P}{4 \pi (149.6 \cdot 10^9)^2} = 1365 \text{ W/m}^2$$

Il flusso a 700 AU sarà allora pari a:

$$F_{700} = \frac{P}{4 \pi (1.047 \cdot 10^{14})^2} = 2.79 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

Questo flusso viene riflesso indietro da tutta la superficie del disco planetario e con una efficienza pari a 0.8 (80 %), dando luogo ad una potenza totale (luminosità) riflessa pari a:

$$P_{\text{rifl}} = F_{700} \cdot \pi R^2 \cdot 0.8 = 3.01 \cdot 10^{12} \text{ W}$$

la quale infine, essendo riflessa da mezza superficie planetaria, si distribuisce su mezzo angolo solido totale, dando luogo a un flusso, alla distanza della Terra dal pianeta ($700 - 1 = 699 \text{ AU} = 1.046 \cdot 10^{11} \text{ km}$), pari a:

$$F_{\text{rifl},699} = \frac{P_{\text{rifl}}}{2 \pi (1.046 \cdot 10^{14})^2} = 4.38 \cdot 10^{-17} \text{ W/m}^2$$

Infine, poiché con un flusso F_1 la magnitudine apparente del Sole è $m_{\text{Sole}} = -26.74$ (Tabella 1), possiamo scrivere:

$$m - m_{\text{Sole}} = -2.5 \log \frac{F_2}{F_1}$$

da cui si ricava: $m = -26.74 - 2.5 \log \left(\frac{4.38 \cdot 10^{-17}}{1365} \right) \cong +22$.

5. Quando gli alieni siamo noi...

Un astronomo che vive sul pianeta “Qfwfq” orbitante intorno alla stella DQ Psc, scopre, con il metodo dei transiti, che la stella da lui denominata Haw-1, a noi più nota come Sole, ha un pianeta molto interessante. Da analisi dettagliate, l'astronomo scopre che il pianeta alieno è roccioso, provvisto di grandi quantità di acqua e, soprattutto, ospita forme di vita. Il pianeta, che l'astronomo nel suo linguaggio chiama Haw-1b, è chiaramente quello che noi chiamiamo Terra. In seguito a questa scoperta, una missione scientifica parte alla volta di Haw-1, con l'obiettivo di acquisire più informazioni sul pianeta abitato. Purtroppo le astronavi di “Qfwfq” sono vulnerabili alla radiazione solare e sono costrette a fermarsi a una distanza che, nelle nostre unità di misura, risulta essere di 2.2 UA. Da questa distanza gli scienziati a bordo dell'astronave riescono a ricavare le desiderate informazioni sul pianeta Haw-1b, mentre gli astronomi sul lontano pianeta “Qfwfq” continuano a osservarne i transiti davanti alla sua stella madre. Considerando che, vista dalla Terra, la stella DQ Psc ha coordinate $AR = 23^{\text{h}} 59^{\text{m}} 46^{\text{s}}$, $\delta = -00^{\circ} 16' 48''$ e una parallasse $\pi = 0.0024''$, rispondere alle seguenti domande.

- 1) Quanto vale la diminuzione percentuale di luminosità del Sole prodotta dal transito della Terra davanti ad esso, misurata dall'astronomo sul pianeta “Qfwfq”?
- 2) Quanto vale la durata di un transito della Terra davanti al Sole, osservato dall'astronomo sul pianeta “Qfwfq”?
- 3) Quanto vale la durata di un transito della Terra davanti al Sole, osservato dagli scienziati a bordo dell'astronave a una distanza di 2.2 AU dal Sole?
- 4) Se la missione partita da “Qfwfq” ha viaggiato all'80% della velocità della luce, quanto è durato il viaggio da DQ Psc alla Terra, se misurato con un orologio posto sul pianeta di partenza?

Assumere l'orbita della Terra circolare.

Soluzione: Dal momento che la stella DQ Psc, vista dalla Terra, si trova in una posizione molto vicina al punto γ , il transito avviene lungo un diametro solare.

- 1) La diminuzione relativa di luminosità è data dal rapporto tra le aree dei dischi terrestre e solare, ovvero tra il quadrato dei rispettivi raggi:

$$\frac{\Delta L}{L} = \left(\frac{R_T}{R_{\text{Sole}}} \right)^2 = 8.4 \cdot 10^{-5}$$

ovvero, in termini percentuali (moltiplicando il risultato per 100), $8.4 \cdot 10^{-3} \%$.

- 2) Per l'osservatore posto sul pianeta alieno il transitò dura il tempo che la Terra impiega a percorrere il tratto della sua orbita sotteso dal diametro del disco solare. Essendo il raggio dell'orbita terrestre molto maggiore del raggio solare, si può approssimare tale tratto di orbita come rettilineo e, dato che l'osservatore è a distanza praticamente infinita, la lunghezza di questo tratto può essere assunta pari al diametro solare. Varrà quindi la proporzione:

$$2\pi \cdot (1 \text{ UA}) : 1 \text{ anno} = 2R_{\text{Sole}} : \Delta t$$

da cui:

$$\Delta t = \frac{R_{\text{Sole}}}{\pi \cdot (1 \text{ UA})} (1 \text{ anno}) = 0.5405 \text{ giorni} = 12.97 \text{ ore}$$

- 3) A una distanza di 2.2 AU il tratto di orbita terrestre non può più essere approssimato al diametro solare. Con riferimento alla figura a lato, e assumendo ancora lineare il tratto **l**, vale la relazione di similitudine tra triangoli che porta alla seguente proporzione:

$$2R_{\text{Sole}} : 2.2 \text{ AU} = l : (2.2 - 1) \text{ AU}$$

da cui:

$$l = 2R_{\text{Sole}} \frac{1.2}{2.2} = 0.545 \cdot 2R_{\text{Sole}}$$

ovvero il tratto **l** sarà, rispetto al caso precedente, più corto di un fattore 0.545. Di conseguenza, essendo la velocità orbitale della Terra costante, anche il tempo di transitò si accorcerà dello stesso fattore, diventando:

$$\Delta t_{2.2} = 0.545 \cdot \Delta t = 7.07 \text{ ore}$$

Va notato che questo tempo di transitò è in realtà quello siderale, mentre indubbiamente l'astronave aliena, ferma a 2.2 AU di distanza dal Sole, starà orbitando intorno a quest'ultimo. Dunque il "vero" tempo di transitò da considerare è quello "sinodico" visto dall'astronave. Calcoliamo dunque il periodo sinodico della Terra visto da 2.2 UA, prima di tutto calcolando il periodo di rivoluzione siderale dell'astronave aliena per mezzo della III Legge di Keplero ($T_{\text{Terra}}=1$):

$$T_{2.2} = \sqrt{2.2^3} = 3.263 \text{ anni}$$

Si ottiene, considerando che i periodi sono espressi in anni e che quindi $T_T=1$:

$$\frac{1}{T_{\text{sin},T}} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_{\text{astronave}}} = 1 - \frac{1}{T_{\text{astronave}}} = 0.6935 \text{ anni}^{-1}$$

da cui:

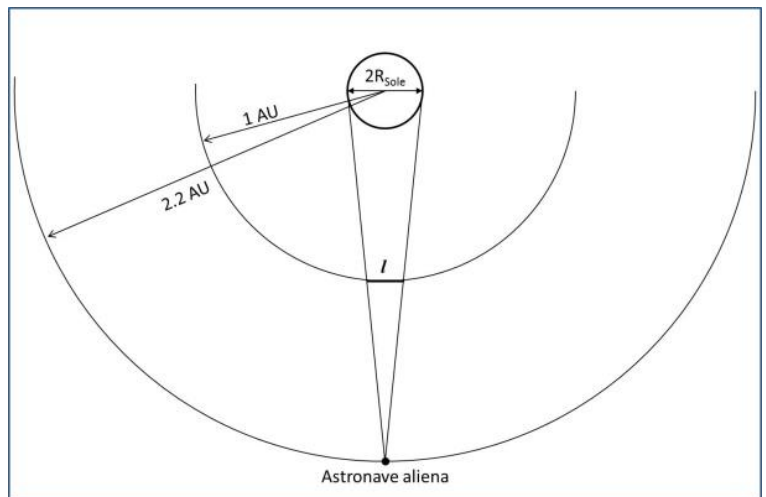
$$T_{\text{sin},T} = 1.442 \text{ anni}$$

Possiamo adesso reimpostare la proporzione già utilizzata per la soluzione del quesito 2, avendo cura di utilizzare $l = 0.545 \cdot 2R_{\text{Sole}}$ al posto di $2R_{\text{Sole}}$, 1.442 anni al posto di 1 anno e con $\Delta t_{2.2}$ al posto di Δt , ottenendo:

$$2\pi \cdot (1 \text{ UA}) : 1.442 \text{ anni} = 0.545 \cdot 2R_{\text{Sole}} : \Delta t_{2.2}$$

in definitiva il tempo di transitò osservato dall'astronave alla distanza di 2.2 AU sarà:

$$\Delta t_{2.2} = \frac{0.545 \cdot R_{\text{Sole}}}{\pi \cdot (1 \text{ UA})} (1.442 \text{ anni}) = 1.164 \cdot 10^{-3} \text{ anni} = 0.425 \text{ giorni} = 10.20 \text{ ore}$$



4) La distanza della stella DQ Psc dal Sole è pari a:

$$d = \frac{1}{\pi} \text{ pc} = 416.67 \text{ pc} = 416.67 \cdot 3.26 \text{ a.l.} = 1358.3 \text{ a.l.}$$

Anche a una velocità $v=0.8 \cdot c$, questa distanza è percorsa comunque in un tempo (t_{viaggio}) molto lungo:

$$t_{\text{viaggio}} = \frac{d}{v} = \frac{1358.3}{0.8} \text{ anni} = 1698 \text{ anni}$$

Va detto però che, grazie agli effetti previsti dalla Teoria della Relatività Ristretta, per i tecnici a bordo dell'astronave passano "soltanto" poco meno di 1019 anni.