OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2017

Finale Nazionale - 5 Aprile

Prova Teorica - Categoria Junior

1. Il Sole a Cremona

Calcolare l'altezza massima dell'equatore celeste e l'altezza minima del Sole al passaggio al meridiano in direzione sud per un osservatore che si trova a Cremona (φ = +45° 8').

Soluzione. L'altezza massima (h_{max}) dell'equatore celeste in una località a latitudine "φ" è data dalla relazione: $h_{max} = 90 - \varphi$, che nel caso di Cremona fornisce h_{max}(Cremona) = 90° - 45° 8' = 44° 52'. Poiché l'eclittica forma con l'equatore celeste un angolo ε = 23° 27', l'altezza minima del Sole al meridiano in direzione sud si avrà al solstizio d'inverno e varrà: h_{min}(Sole-Cremona) = 90 – φ – ε = 90° - 45° 8' - 23° 27' = 21° 25'.

2. Il pianeta da identificare

Quale pianeta del Sistema Solare descrive, in media, in poco meno di un mese terrestre circa 1/23 della sua orbita intorno al Sole? Calcolare il periodo sinodico del pianeta e la massima distanza possibile a cui può trovarsi dalla Terra.

Soluzione. Dividiamo per 23 i periodi orbitali riportati nella tabella 2. Nel caso di Marte otteniamo 29.87 giorni. Quindi è Marte il pianeta cercato. Detti E il periodo orbitale della Terra e P il periodo orbitale di Marte, il periodo sinodico di Marte (S_M) vale: $\frac{1}{S_M} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P}$ = 780 giorni. La massima distanza possibile Terra-Marte si ha quando il pianeta è in congiunzione superiore con il Sole e contemporaneamente Terra e Marte si trovano entrambi all'afelio con inoltre le linee degli apsidi coincidenti. In tale particolare configurazione (che, a causa della precessione dei perieli, o precessione anomalistica, si verifica ogni 268.000 anni circa) detti "A_T" ed "e_T" il semiasse e l'eccentricità dell'orbita della Terra e "A_M" ed "e_M" il semiasse e l'eccentricità dell'orbita di Marte, la massima distanza possibile Terra-Marte (D_{TM}) vale: $D_{TM} = A_T\ (1 + e_T) + A_M\ (1 + e_M) = 152.1\ \cdot 10^6\ km + 249.2\ \cdot\ 10^6\ km = 401.3\ \cdot\ 10^6\ km$.

3. L'esplosione di un pianeta

Nel film *Il pianeta proibito* (1956), i protagonisti scappano da un pianeta dopo aver attivato un sistema che ne provocherà la distruzione completa dopo 24 ore. Se l'astronave con cui fuggono viaggia a 0.18 volte la velocità della luce, a che distanza si troveranno dal pianeta quando lo vedranno esplodere?

Soluzione. Lo spazio percorso dalla navicella dopo l'esplosione del pianeta è dato dalla relazione: $s_N = s_0 + v_n \cdot t$ (con $s_0 = v_n \cdot 24$ h = 0.18 · c · 86400 = 46.6 · 10^8 km), mentre quello percorso dalla luce è: $s_L = c \cdot t$.

Quando la luce prodotta dall'esplosione raggiungerà la navicella avremo $s_N = s_L$, il che avviene a un tempo:

$$t = 24\,h + \frac{s_0}{c - v_n} = 86400 + \frac{46.6 \cdot 10^8}{245829} = 105356\, s\ (\cong 29\text{h } 16\text{m})$$

ovvero quando l'astronave si troverà a una distanza dal pianeta D ≅ $56.9\ \cdot\ 10^8\ km$ ≅ 38 UA .

Il diametro angolare (α) del pianeta da una distanza (D) di 38 UA è dato dalla relazione:

$$\alpha = 2\ \cdot \sin^{-1}\frac{R}{D} = 2\ \cdot\ \sin^{-1}\frac{6378}{5.684\ \cdot\ 10^9} = 0''.46$$

4. Una rotazione molto veloce

Attorno alla stella nana rossa Trappist-1, che si trova a 39 anni luce dal Sole, sono stati individuati sette pianeti, tre dei quali situati nella così detta "zona abitabile". Le stime di densità hanno mostrato che questi tre pianeti dovrebbero essere rocciosi, proprio come i pianeti interni del Sistema Solare. Supponendo che la densità media di uno di questi sia uguale a quella della Terra, trovare il più breve periodo di rotazione che questo pianeta può avere affinché un corpo all'equatore non sia espulso a causa della forza centrifuga.

Soluzione: Il limite massimo della velocità di rotazione (v_r) per il quale l'attrazione gravitazionale è ancora in grado di trattenere i corpi all'equatore del pianeta è quella per cui la forza centripeta uguaglia la forza gravitazionale. Detto "R" il raggio del pianeta si ha:

$$\frac{G\ m\ M}{R^2} = m\ \frac{v_r^2}{R}$$

Detta ρ la densità media, la massa del pianeta vale: $M = \varrho V = \varrho \frac{4}{3} \pi R^3$ e avremo quindi:

$$v_r = \sqrt{\frac{G M}{R}} = \sqrt{\frac{4 \pi \rho G R^2}{3}}$$

Poiché, detto "T" il periodo di rotazione, si ha: $T = \frac{2 \pi R}{v_r}$, si ottiene infine l'equazione:

$$T = \sqrt{\frac{3 \pi}{\rho G}}$$

Ricavando la densità media della Terra dai dati della tabella 2 ($\rho_T = 5493$ kg/m^3) otteniamo:

$$T = 5072 \text{ s} = 1\text{h } 25 \text{ m}$$

5. Una goccia di Sole

Nel film *Rapunzel* (Disney, 2010), una "goccia di Sole" cade sulla Terra. Assumendo che il diametro della goccia sia quello di una grossa goccia d'acqua, ovvero 1 cm, e supponendo che la goccia abbia la stessa temperatura superficiale del Sole, calcolare:

1) la sua luminosità in Watt;

2) la magnitudine visuale apparente che avrebbe, osservata dalla distanza di 1 m.

[La costante solare (A), ovvero il flusso di potenza radiativa che arriva dal Sole alla distanza della Terra, vale: A = 1365 W/m^2]

Soluzione. Dal valore della costante solare possiamo ricavare la potenza totale emessa dal Sole, che è data da:

$$P_{tot,Sole} = A \cdot 4\pi\,(1\ AU)^2 = 1365\ \cdot 4\pi\,(149.6\ \cdot\ 10^9)^2 = 3.84 \cdot 10^{26}\ \text{W}$$

La luminosità specifica, ovvero la potenza emessa da 1 m^2 di superficie solare, è allora data da:

$$p_{Sole} = \frac{P_{tot,Sole}}{4\,\pi\,{R_{Sole}}^2} = 6.32 \cdot 10^7\ \text{W m}^{-2}$$

Poiché la goccia ha le stesse caratteristiche del Sole, ne avrà in particolare la stessa luminosità specifica, per cui, essendo la superficie (S) della goccia data da:

$$S = 4\,\pi\,(0.005)^2 = 3.14 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

la potenza totale emessa dalla goccia sarà pari a:

$$P_{tot,goccia} = p_{Sole} \cdot\ S = 1.98 \cdot 10^4\ \text{W} = 19.8\ \text{kW}$$

Per calcolare la magnitudine apparente della goccia, ricordiamo che la magnitudine apparente del Sole, vista dalla Terra, vale: $m_{Sole} = -26.74$. Ne deriva che la goccia, alla distanza di 1 UA, avrebbe una magnitudine apparente:

$$m_{goccia,1\ AU} = m_{Sole} - 2.5 \log \frac{P_{tot,goccia}}{P_{tot,Sole}} = 28.98$$

mentre, alla distanza di 1 m, la magnitudine sarebbe:

$$m_{goccia,1\ m} = m_{goccia,1AU} - 2.5 \log \left(\frac{1\ \text{UA}}{1\ \text{m}}\right)^2 = -26.89$$

Si noti come il valore di $m_{goccia,1m}$ sia molto vicino a quello di m_{Sole}, questo perché il diametro angolare della goccia, a 1 m di distanza ($\cong 34'.4$), è molto prossimo al diametro angolare medio del Sole visto dalla Terra ($\cong 32'$). La goccia, insomma, vista da 1 m di distanza, sarebbe quanto di più simile ci sia al Sole visto dalla Terra!