



OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2017

Finale Nazionale - 5 Aprile

Prova Pratica - Categoria Senior

Il Sistema planetario Trappist-1

La mappa stellare nella pagina successiva indica la zona del cielo dove si trova la stella Trappist-1, attorno alla quale lo scorso 22 febbraio è stata annunciata la scoperta di 7 pianeti extrasolari. Le tabelle in fondo alla pagina riportano i dati principali della stella e dei sette pianeti.

- 1) Tra quanto tempo la stella Trappist-1 si troverà alla minima distanza dal Sole? Quanto varrà questa distanza? Trappist-1 sarà visibile a occhio nudo dalla Terra?
- 2) Calcolare le coordinate della stella nell'anno 20000 e indicare con la miglior precisione possibile la posizione attuale (con il simbolo \circ) e futura (con il simbolo \times) sulla mappa stellare.
- 3) Il sistema Trappist-1 prende il nome dal telescopio Trappist, che studia i transiti di pianeti extrasolari, situato in Cile, a La Silla ($29^\circ 15' 16,56''$ Sud, $70^\circ 44' 21,84''$ Ovest, UT -3). Valutare se il telescopio Trappist può osservare questa notte il sistema, sapendo che il tempo siderale a La Silla alla mezzanotte locale sarà $t = 11h 15m$, calcolare inoltre a che ora sorge e a quale altezza sull'orizzonte locale culmina Trappist 1. In quale periodo dell'anno risulterebbe la massima osservabilità?
- 4) Calcolare la massa della stella esprimendola in masse solari.
- 5) Completare la tabella dei pianeti calcolando i parametri mancanti.
- 6) Il raggio interno (più vicino alla stella) della zona di abitabilità di un sistema planetario ($R_{ABITABILE}$), utilizzando le unità astronomiche, può essere ricavato dal rapporto della luminosità della stella e del Sole:

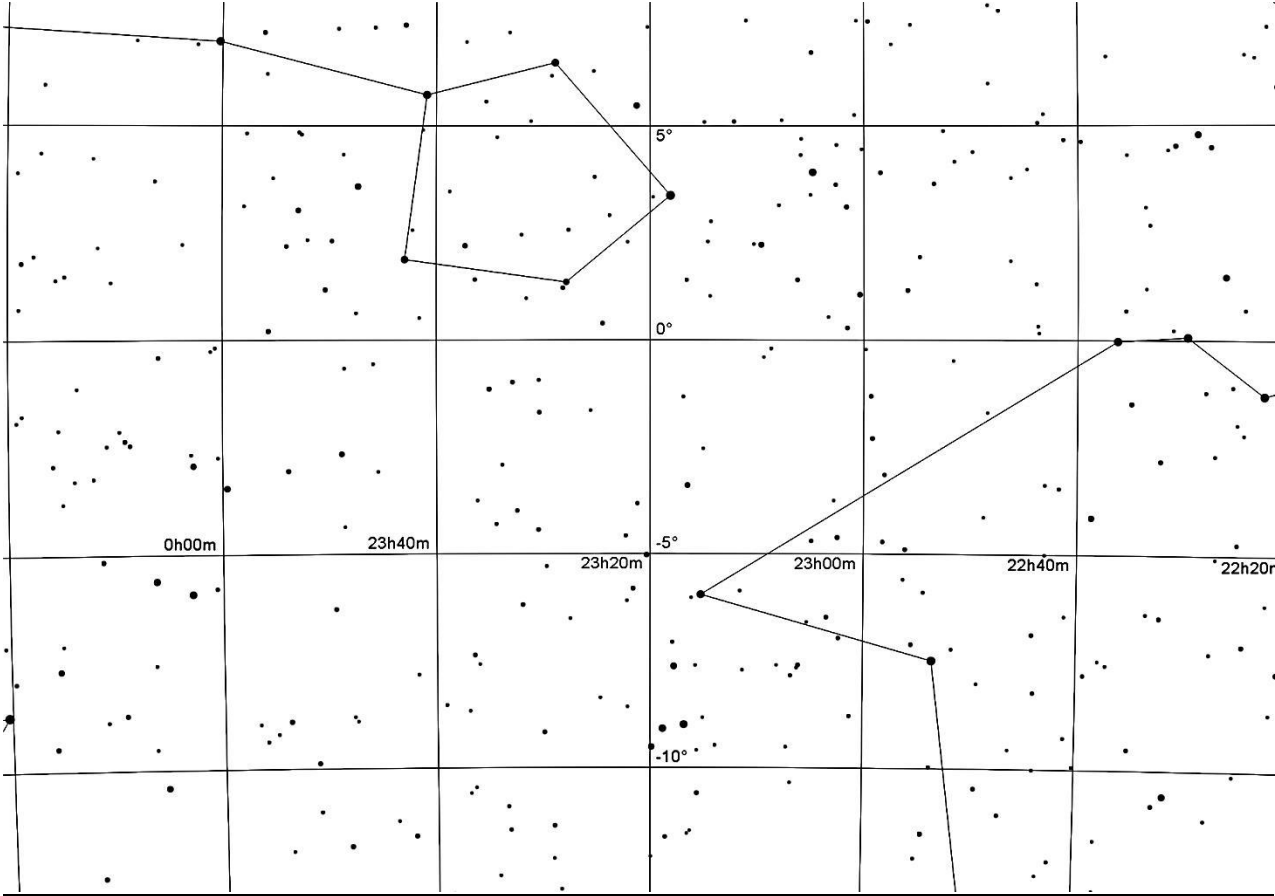
$$R_{ABITABILE} = \sqrt{\frac{L_{stella}}{L_{sole}}}$$

In generale la zona di abitabilità si estende tra $R_{ABITABILE}$ e $2 \cdot R_{ABITABILE}$. Calcolare $R_{ABITABILE}$ per il sistema Trappist-1 e indicare quali dei 7 pianeti si trovano all'interno della sua zona di abitabilità.

Pianeta	Massa	Raggio	Periodo	Semiassse magg.
b	$0.85 M_T$	$1.09 R_T$	1.51 giorni	0.011 UA
c	$1.38 M_T$	$1.06 R_T$	2.42 giorni	
d	$0.41 M_T$	$0.77 R_T$	4.05 giorni	0.021 UA
e	$0.62 M_T$	$0.92 R_T$		0.028 UA
f	$0.68 M_T$	$1.04 R_T$		0.037 UA
g	$1.34 M_T$	$1.13 R_T$	12.35 giorni	0.045 UA
h	-----	$0.76 R_T$	20 giorni	0.061 UA

Dati di Trappist-1	
AR (J2000): 23h 06m 29.3 s	Dec (J2000): $-05^\circ 02' 28.6''$
Parallasse: $82.58 \cdot 10^{-3}$ secondi d'arco	Velocità radiale: -56.30 km/s
Moto proprio AR: $922.1 \cdot 10^{-3}$ secondi d'arco/anno	Moto proprio Dec: $-471.9 \cdot 10^{-3}$ secondi d'arco/anno
Classe spettrale: M8	Temperatura superficiale: 2550 K
Raggio medio: $0.117 R_{Sole}$	Magnitudine apparente: 18.80

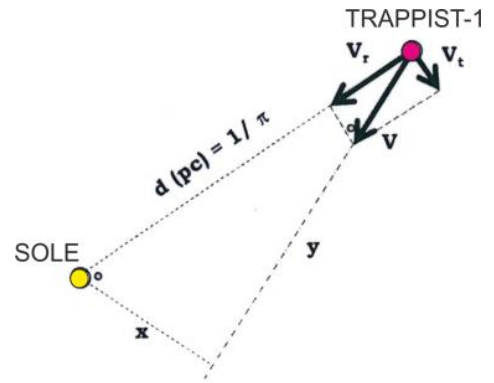
Mappa stellare



SOLUZIONE

1. Riproduciamo graficamente la situazione. La velocità radiale V_R (in direzione del Sole) e la velocità tangenziale V_T (in direzione perpendicolare alla precedente) sono le componenti della velocità di Trappist-1 nello spazio (che chiamiamo V). Nella figura ci sono due triangoli simili: uno ha per cateti V_T e V_R , e per ipotenusa V , l'altro ha per cateti la distanza minima di Trappist-1 dal Sole (x) e la distanza (y) che Trappist-1 deve percorrere per arrivare al punto di distanza minima, e per ipotenusa la distanza attuale di Trappist-1 dal Sole (d). Valgono quindi le seguenti relazioni di proporzionalità:

$$\begin{aligned} V_R : y &= V : d \\ V_T : x &= V : d \end{aligned}$$



Calcoliamo ora d e V , necessarie per ricavare la distanza minima dal Sole (x) e la distanza percorsa (y):

$$d = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{82.58'' \cdot 10^{-3}} = 12.11 \text{ parsec}$$

La velocità tangenziale V_T è la somma vettoriale delle due componenti del moto proprio in A.R. e Dec:

$$V_T = \sqrt{922.1^2 + 471.9^2} = 1036 \cdot 10^{-3} \text{ secondi d'arco/anno}$$

che, alla distanza di Trappist-1 (12.11 pc), corrispondono a:

$$V_T = 12.11 \cdot \tan\left(\frac{1036 \cdot 10^{-3}}{3600}\right) = 60.83 \cdot 10^{-6} \frac{\text{pc}}{\text{anno}} = 59.48 \text{ km/s}$$

Abbiamo di conseguenza il valore della velocità di Trappist-1 nello spazio:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_T^2} = \sqrt{(-56.30)^2 + (59.48)^2} = 81.90 \text{ km/s}$$

La minima distanza dal Sole sarà:

$$x = \frac{V_T \cdot d}{V} = \frac{59.48 \cdot 12.11}{81.90} = 8.79 \text{ pc}$$

La distanza percorsa (y) per arrivare nel punto di minima distanza dal Sole sarà percorsa a velocità V , il tempo t sarà quindi:

$$t = \frac{y}{V} = \frac{V_R \cdot d}{V^2} = \frac{56.3 \cdot 12.11 \cdot 30857 \cdot 10^9}{81.90^2} = 3.14 \cdot 10^{12} \text{ s} \cong 99390 \text{ anni}$$

Per valutare se la stella Trappist-1 alla minima distanza dal Sole sarà visibile a occhio nudo, dobbiamo calcolare la sua magnitudine alla minima distanza (m_x) utilizzando la relazione:

$$m_{\text{attuale}} - m_x = -2.5 \log\left(\frac{x}{d}\right)^2$$

da cui:

$$m_x = 5 \log\left(\frac{x}{d}\right) + m_{\text{attuale}} = 5 \log(0.726) + 18.80 = 18.10$$

Poiché a occhio nudo possiamo vedere stelle fino a magnitudine circa 6, Trappist-1 non sarà ma visibile a occhio nudo, nemmeno quando arriverà alla minima distanza dal Sole.

2. Il moto proprio della stella è di $922.1 \cdot 10^{-3}$ secondi d'arco/anno in Ascensione Retta e $-471.9 \cdot 10^{-3}$ secondi d'arco/anno in Declinazione: nell'anno 20000 le sue coordinate, rispetto a quelle date in tabella (J2000) saranno variate di:

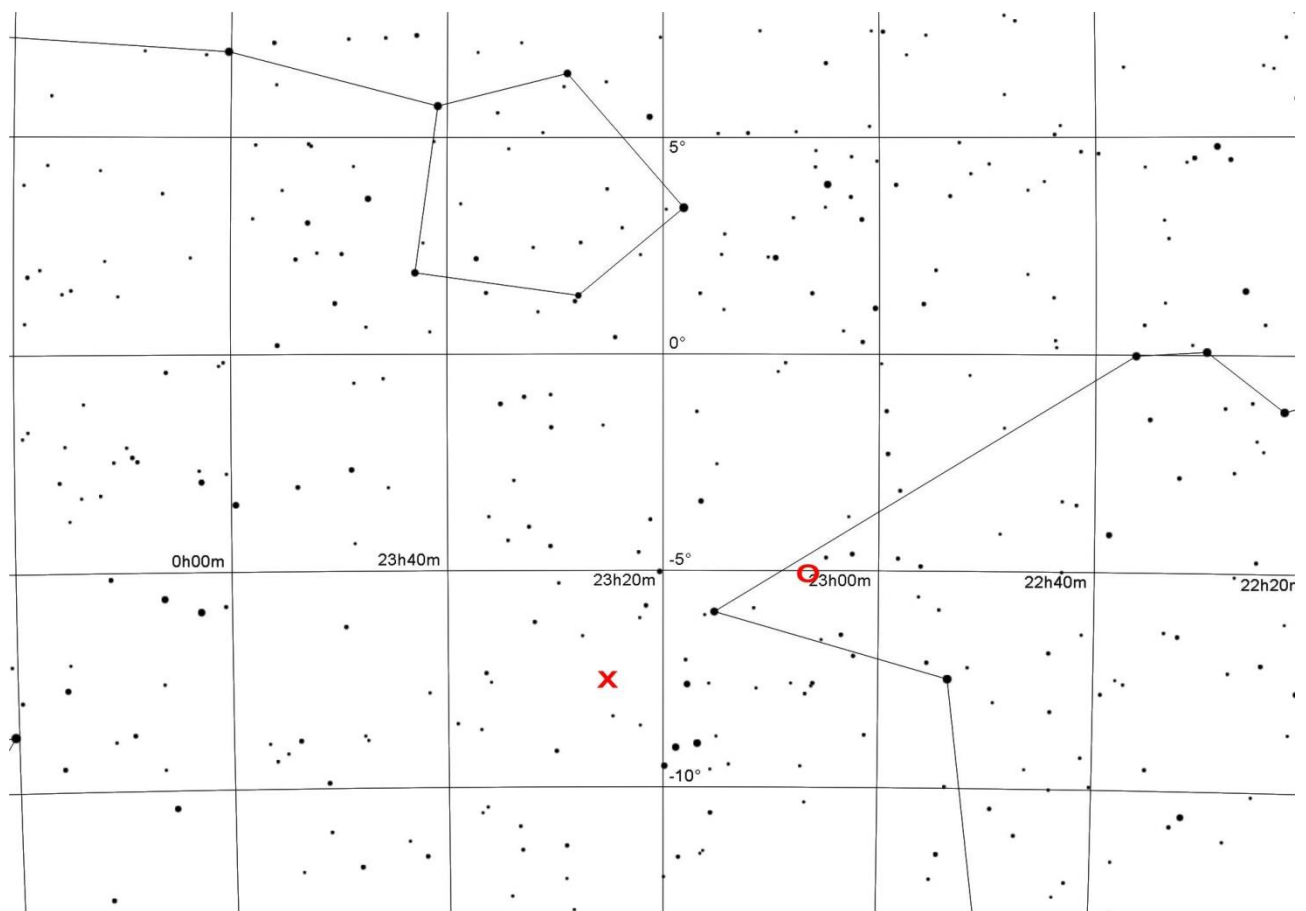
$$\Delta AR = 922.1 \cdot 10^{-3} \cdot (20000 - 2000) = 16598'' = +18^m 26.5^s$$

$$\Delta Dec = -471.9 \cdot 10^{-3} \cdot (20000 - 2000) = -8494'' = -2^\circ 21' 34''$$

Le coordinate di Trappist-1 nel 20000 saranno quindi:

AR = 23h 24m 55.8s, Dec = $-07^\circ 24' 2.6''$ e la sua posizione è indicata sulla mappa (dove il cerchio indica la posizione attuale e la croce quella nell'anno 20000).

Nota: poiché la declinazione della stella cambia, il calcolo di ΔAR dovrebbe includere un fattore di correzione legato alla variazione della declinazione. Nella soluzione questo fattore è stato trascurato, sia perché la stella si trova in prossimità dell'equatore celeste, sia perché la variazione di declinazione è piccola.



3. Il tempo siderale alla mezzanotte locale è 11h 15m: le stelle con AR = 17h 15m stanno sorgendo sull'orizzonte Est. Trappist-1 ha AR = 23h 06m e si trova molto vicina all'equatore celeste (Dec = $-05^\circ 02'$) quindi sorgerà dopo 5 ore e 51 minuti e sarà quindi osservabile poco prima dell'alba.

(**Nota:** il 5 aprile a La Silla il Sole sorge alle 07:56, mentre il crepuscolo astronomico, Sole a -18° sotto l'orizzonte, inizia alle 06:37, quindi Trappist-1 è ben osservabile per circa 40 minuti).

Dato che La Silla si trova nell'emisfero meridionale, Trappist-1 culmina a un'altezza sull'orizzonte pari a $h = 90^\circ + \phi - \delta = 90^\circ - 29^\circ 15' + 5^\circ 02' = 65^\circ 47'$.

Il periodo di migliore osservabilità di Trappist-1 sarà tra circa 6 mesi, quando sorgerà al tramonto del Sole.

4. Applicando la terza legge di Keplero

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{P^2 \cdot G}$$

ai quattro pianeti (b, d, g, h) di cui conosciamo il periodo e il semiasse maggiore, otteniamo i seguenti valori per la massa della stella:

$$M_b = 1.54 \cdot 10^{29} \text{ kg} = 0.077 M_{\text{Sole}}$$

$$M_d = 1.50 \cdot 10^{29} \text{ kg} = 0.075 M_{\text{Sole}}$$

$$M_g = 1.59 \cdot 10^{29} \text{ kg} = 0.079 M_{\text{Sole}}$$

$$M_h = 1.51 \cdot 10^{29} \text{ kg} = 0.075 M_{\text{Sole}}$$

Il valore più preciso per la massa della stella Trappist-1 è la media dei quattro valori: $M_{\text{Trappist-1}} = 0.077 M_{\text{Sole}}$.

5. Utilizzando la terza legge di Keplero e la massa della stella appena ricavata ($M_{\text{Trappist-1}} = 0.077 M_{\text{Sole}}$) possiamo ora calcolare i dati mancanti:

$$a_c = 0.014 \text{ UA}$$

$$P_e = 6.17 \text{ giorni}$$

$$P_f = 9.37 \text{ giorni}$$

6. La luminosità di una stella è data da:

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

$$\begin{aligned} R_{\text{ABITABILE}} &= \sqrt{\frac{4\pi R_{\text{Trappist-1}}^2 \cdot \sigma T_{\text{Trappist-1}}^4}{4\pi R_{\text{Sole}}^2 \cdot \sigma T_{\text{Sole}}^4}} = \sqrt{\frac{R_{\text{Trappist-1}}^2 \cdot T_{\text{Trappist-1}}^4}{R_{\text{Sole}}^2 \cdot T_{\text{Sole}}^4}} = \\ &= \sqrt{\frac{(0.117 \cdot R_{\text{Sole}})^2 \cdot 2550^4}{R_{\text{Sole}}^2 \cdot 5778^4}} = \sqrt{\frac{2.80 \cdot 10^{23}}{5.39 \cdot 10^{26}}} = \sqrt{5.19 \cdot 10^{-4}} = 0.023 \text{ UA} \end{aligned}$$

La zona abitabile attorno Trappist-1 è quindi compresa tra 0.023 UA e 0.046 UA: i pianeti che si trovano al suo interno sono e, f e g.