

OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2015



GARA INTERREGIONALE – 16 Febbraio

Problemi e soluzioni - Categoria Junior

Problema 1. L'altezza sull'orizzonte

In quali condizioni l'altezza di una stella sull'orizzonte resta invariata nel corso di una giornata?



Soluzione

L'altezza di una stella resta invariata in due casi:

1. L'osservatore si trova in uno dei poli terrestri; in questo caso l'altezza di tutte le stelle resta invariata;
2. La stella si trova esattamente in uno dei poli celesti; in questo caso la posizione dell'osservatore non è rilevante.



Problema 2. La distanza di un aerostato

Un osservatore vede un aerostato di diametro $D = 2 r = 13$ m proiettarsi sul disco della Luna Piena. Per l'osservatore, l'aerostato risulta avere un diametro apparente pari a metà di quello della Luna. Sapendo che quella notte la Luna si trova all'apogeo, calcolare quanto dista l'aerostato dall'osservatore.

La distanza della Luna all'apogeo vale:

$$d = (1+e) \cdot 384400 \text{ km} = 405542 \text{ km} \quad (\text{con } e = 0.055 \text{ eccentricità dell'orbita lunare})$$

La relazione che lega le dimensioni lineari R di un oggetto distante alle sue dimensioni angolari α (esprese in arcsec) è la seguente:

$$R = d \cdot \frac{\alpha \text{ (arcsec)}}{206265}$$

dove d è la distanza dell'oggetto dall'osservatore e 206265 sono i secondi d'arco contenuti in 1 radiante. Poiché il diametro della Luna è $R = 3476$ km, sarà:

$$\alpha_{LUNA}'' = 206265 \cdot \frac{R}{d} = 206265 \cdot \frac{3476}{405542} = 1767''.95 = 0^\circ.4911 = 29' 27''.95$$

Dal momento che l'aerostato risulta avere un diametro angolare pari a metà della Luna, sarà:

$$\alpha_{aer}'' = \frac{\alpha_{LUNA}''}{2} = \frac{1767''.95}{2} = 883''.98$$

da cui in definitiva segue:
$$d = 206265 \cdot \frac{D}{\alpha_{aer}} = 206265 \cdot \frac{13}{883.98} = \mathbf{3033.38 \text{ m}}$$

Il risultato si può ottenere, in modo esatto, usando le funzioni trigonometriche, come segue.

Essendo il diametro della Luna $R = 3476$ km, il suo diametro angolare apparente sarà:

$$\alpha_{LUNA} = \arctg(3476/405542) = 0^\circ.4911 = 29' 27''.96.$$

La distanza d dell'aerostato dall'osservatore risulta quindi pari a:

$$d = D / \operatorname{tg}(\alpha_{LUNA}/2) = 3033.36 \text{ m}$$

Problema 3. Una rivoluzione di satelliti

Un satellite di Giove si trova a una distanza pari a $d_1 = 14.9 \cdot R_{\text{Giove}}$ dal centro del pianeta e il suo periodo di rivoluzione è $P_1 = 7^d 3^h 36^m$. Qual è il periodo di rivoluzione di un altro satellite la cui distanza dal pianeta è pari a $d_2 = 2.52 \cdot R_{\text{Giove}}$?



Soluzione

Dai dati del problema, ed essendo il raggio di Giove pari a 71492 km, si avrà:

$$d_1 = 14.9 \cdot 71492 = 1.07 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$d_2 = 2.52 \cdot 71492 = 1.80 \cdot 10^5 \text{ km}$$

$$P_1 = 7^d 3^h 36^m = 7^d.15$$

Per la III legge di Keplero deve essere:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{a_2^3}{P_2^2} \quad \text{da cui:} \quad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{1.07 \cdot 10^6}{1.80 \cdot 10^5}\right)^3 = \left(\frac{7.15}{P_2}\right)^2$$

ovvero:

$$P_2^2 = (7.15)^2 \cdot [(1.80 \cdot 10^5) / (1.07 \cdot 10^6)]^3 = 51.12 \cdot (0.1682)^3 = 51.12 \cdot 4.76 \cdot 10^{-3} = 0.2433$$

$$\text{e cioè:} \quad P_2 = (0.2433)^{1/2} = 0^d.4932 = 11^h 50^m 12^s$$

Questo problema si può anche risolvere direttamente dalla III legge di Keplero generalizzata senza conoscere i dati dell'altro satellite, una volta data la massa di Giove:

$$P_2^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Giove}}} d_2^3 = (38.48 \cdot 5.832 \cdot 10^{24}) / (6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.90 \cdot 10^{27}) = 1.817 \cdot 10^9 \text{ s}$$

$$\text{da cui:} \quad P_2 = 42624 \text{ s} = 11^h 50^m 24^s$$

con la discrepanza sui secondi rispetto alla prima soluzione dovuta alla precisione con cui sono forniti i dati.



Problema 4. L'astronauta e la bilancia

Un astronauta, il cui peso sulla Terra è $P = 750 \text{ N}$, intraprende un volo spaziale a bordo della sua astronave. Calcolare la sua massa e il suo peso a una distanza dalla Terra dove l'accelerazione di gravità è $g_2 = 6.82 \text{ m/s}^2$.

Soluzione

Sulla Terra, l'accelerazione di gravità vale in media: $g_T = 9.82 \text{ m/s}^2$.

La massa dell'astronauta sarà dunque:

$$m = \frac{P}{g_T} = \frac{750}{9.82} = 70.64 \text{ kg}$$

La massa è una caratteristica intrinseca dei corpi, il cui valore resta costante in qualunque punto dello spazio, mentre il peso è strettamente legato al valore locale dell'accelerazione di gravità. Quindi, la massa dell'astronauta non varia, mentre il peso alla distanza dalla Terra dove l'accelerazione di gravità è $g_2 = 6.82 \text{ m/s}^2$ sarà:

$$P_2 = m g_2 = 70.64 \cdot 6.82 = \mathbf{520.11 \text{ N}}$$

(**nota:** nel testo consegnato per la Gara Interregionale, a causa di un refuso, il peso dell'astronauta viene dato come $P = 75 \text{ N}$. Qui viene riportato il valore originale $P = 750 \text{ N}$, ma nella correzione dei compiti svolti dai partecipanti si sono considerati corretti i valori derivanti da $P = 75 \text{ N}$)

Problema 5. I passaggi del satellite

Un satellite artificiale di massa $m = 350 \text{ kg}$ si muove intorno alla Terra su un'orbita equatoriale, a una distanza $d = 4325 \text{ km}$ dalla sua superficie. Un osservatore lo vede passare al meridiano alla mezzanotte esatta. A che ora lo vede passare di nuovo, se il satellite si muove da Ovest verso Est? A che ora lo vedrebbe passare di nuovo, se invece il satellite si muovesse da Est verso Ovest?



Soluzione

La distanza (D) del satellite dal centro della Terra (raggio della Terra = 6378 km) è pari a:

$$D = 6378 + 4325 \text{ km} = 10703 \text{ km}$$

È possibile ricavare il periodo di rivoluzione siderale del satellite $T_{S, sid}$ applicando la III Legge di Keplero (la massa del satellite è certamente trascurabile rispetto alla massa della Terra $M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$):

$$T_{S, sid} = 2\pi \sqrt{\frac{D^3}{GM}} = 11025.2 \text{ s} = 3^h 03^m 45^s.2$$

I passaggi successivi del satellite al meridiano di uno stesso luogo avvengono a intervalli pari al suo periodo sinodico riferito alla rotazione terrestre. Ricordiamo che il periodo di rotazione siderale della Terra attorno al proprio asse è $T_T = 23^h 56^m 02^s.4 = 86162.4 \text{ s}$

Consideriamo ora i due casi proposti dalla traccia del problema.

Caso 1. Se il satellite si muove ad Ovest verso Est, cioè nella stessa direzione della rotazione terrestre, i periodi siderali, nonché il periodo sinodico risultante, hanno tutti lo stesso segno (che assumiamo positivo, senza perdita di generalità) e si ottiene:

$$\frac{1}{T_{S, sin}^{(1)}} = \frac{1}{T_{S, sid}} - \frac{1}{T_T}$$

da cui:

$$T_{S, sin}^{(1)} = 12643 \text{ s} = \mathbf{3^h 30^m 43^s}$$

Caso 2. Se il satellite si muove da Est verso Ovest, cioè nella direzione opposta a quella della rotazione terrestre, il suo periodo siderale, nonché il suo periodo sinodico risultante, sono da considerare con segno opposto a quello della rotazione terrestre e si ottiene

$$-\frac{1}{T_{S, sin}^{(2)}} = -\frac{1}{T_{S, sid}} - \frac{1}{T_T} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{T_{S, sin}^{(2)}} = \frac{1}{T_{S, sid}} + \frac{1}{T_T}$$

da cui:

$$T_{S, sin}^{(2)} = 9774.5 \text{ s} = \mathbf{2^h 42^m 54^s.5}$$



Olimpiadi Italiane di Astronomia 2015

Gara Interregionale

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

<i>Raggio medio</i>	695475 km	<i>Età stimata</i>	$4.57 \cdot 10^9$ anni
<i>Massa</i>	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg	<i>Classe spettrale</i>	G2 V
<i>Temperatura superficiale</i>	5778 K	<i>Posizione nel diagramma HR</i>	Sequenza principale
<i>Magnitudine apparente dalla Terra</i>	- 26.8	<i>Distanza media dal centro galattico</i>	27000 anni-luce
<i>Magnitudine assoluta</i>	+ 4.83	<i>Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico</i>	$2.5 \cdot 10^8$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	<i>Mercurio</i>	<i>Venere</i>	<i>Terra</i>	<i>Luna</i>	<i>Marte</i>	<i>Giove</i>	<i>Saturno</i>	<i>Urano</i>	<i>Nettuno</i>
<i>Raggio medio (km)</i>	2440	6052	6378	1738	3397	71492	60268	25559	24766
<i>Massa (kg)</i>	$3.30 \cdot 10^{23}$	$4.87 \cdot 10^{24}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$7.35 \cdot 10^{22}$	$6.42 \cdot 10^{23}$	$1.90 \cdot 10^{27}$	$5.68 \cdot 10^{26}$	$8.68 \cdot 10^{25}$	$1.02 \cdot 10^{26}$
<i>Semiassse maggiore dell'orbita (km)</i>	$57.9 \cdot 10^6$	$108.2 \cdot 10^6$	$149.6 \cdot 10^6$	$384.4 \cdot 10^3$	$227.9 \cdot 10^6$	$778.3 \cdot 10^6$	$1.43 \cdot 10^9$	$2.87 \cdot 10^9$	$4.50 \cdot 10^9$
<i>Periodo orbitale</i>	87.97 ^g	224.70 ^g	1 ^a	27.32 ^g	1.88 ^a	11.86 ^a	29.45 ^a	84.07 ^a	164.88 ^a
<i>Eccentricità dell'orbita</i>	0.206	0.007	0.017	0.055	0.093	0.048	0.056	0.046	0.001
<i>Tipo</i>	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie per figure geometriche notevoli

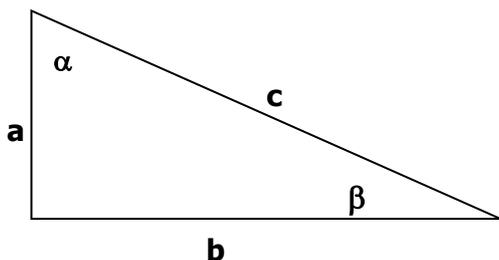
	<i>Triangolo</i>	<i>Rettangolo</i>	<i>Quadrato</i>	<i>Cerchio</i>	<i>Ellisse</i>	<i>Sfera</i>
<i>Area</i>	$b h / 2$	$\ell_1 \ell_2$	ℓ^2	πR^2	$\pi a b$	$4 \pi R^2$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	<i>Simbolo</i>	<i>Valore</i>	<i>Unità di misura</i>
<i>Costante di Stefan-Boltzmann</i>	σ	$5.67 \cdot 10^{-8}$	$W m^{-2} K^{-4}$
<i>Velocità della luce nel vuoto</i>	c	299792	$km s^{-1}$
<i>Costante di Gravitazione Universale</i>	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$m^3 kg^{-1} s^{-2}$
<i>Accelerazione di gravità al livello del mare</i>	g	9.81	$m s^{-2}$

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli

<i>Teorema di Pitagora</i>	$c^2 = a^2 + b^2$
<i>Funzioni trigonometriche</i>	$a = c \sin \beta$ $a = c \cos \alpha$ $a = b \tan \beta$



Olimpiadi di Astronomia 2015

Istruzioni dettagliate per lo svolgimento delle gare scritte

Norme e raccomandazioni generali:

- 1) Il lavoro di ciascun partecipante deve essere eseguito in modo **indipendente** dal lavoro degli altri partecipanti. L'infrazione a questa regola comporta l'immediata squalifica del partecipante.
- 2) Non è necessario riportare sui fogli dei compiti la **formulazione** dei problemi; le soluzioni possono fare riferimento solo ai numeri ordinali dei problemi, che devono però essere indicati con la massima chiarezza nel testo. Le soluzioni devono essere separate le une dalle altre da un intervallo libero di circa 5 cm.
- 3) Prestare la massima attenzione a eventuali **informazioni aggiuntive** fornite nel corso delle gare.
- 4) Eventuali domande ai componenti la Giuria nel corso delle gare saranno rese note a tutti i partecipanti.
- 5) **"Brutta copia"**: se non avete più tempo per copiare in "bella copia" la soluzione o una sua parte, scrivete accanto al numero del problema la frase "*vedi brutta copia*". Senza questi due riferimenti, il lavoro sulla brutta copia non sarà preso in considerazione. Se le soluzioni della brutta copia e della bella copia differiscono, varrà il testo della bella copia.
- 6) Se potete descrivete chiaramente il **modello fisico** considerato, citate le approssimazioni e i fattori ritenuti trascurabili. Dato che saranno valutate soluzioni puramente scritte, è opportuno che descrivate anche i passaggi e le vostre considerazioni, anche se possono sembrare ovvie.
- 7) Una risposta del tipo "sì", "no" non costituisce da sola una valida soluzione, a meno che non sia accompagnata da un'**argomentazione** o dalla descrizione dei criteri che l'hanno determinata.
- 8) Prestare la giusta **attenzione** a ciò che viene richiesto nella formulazione del problema. Ad esempio se viene chiesto il raggio di una stella, dare il suo diametro non costituisce una soluzione del tutto corretta.
- 9) Si possono portar via i fogli con i testi dei problemi alla fine della gara.

Che cos'è vietato:

- **È VIETATO** indicare sulla bella copia o sulla brutta copia nome, cognome o altri **dati individuali**. I dati devono essere indicati **unicamente** nel foglio presente all'interno della busta bianca, in modo da rendere il lavoro anonimo nei confronti della giuria. L'infrazione a questa regola comporta la squalifica.
- **È VIETATO parlare** con altri partecipanti; detenere e adoperare nel corso delle gare qualsiasi tipo di **libro, tabella, catalogo, computer o telefono portatile**.
- **È VIETATO** usare calcolatrici e fogli di carta **differenti** da quelle fornite.
- **È VIETATO** scrivere oltre il **tempo scaduto**, **disturbare** con rumori fastidiosi e superflui.
- **È VIETATO** consegnare il compito e lasciare l'aula prima di **un'ora** dall'inizio della gara.
- **È VIETATO lasciare l'aula** della gara in più di una persona alla volta.

Che cos'è permesso:

- **SI POSSONO** scrivere le soluzioni in **ordine arbitrario**.

Che cos'è consigliato:

- **SI CONSIGLIA** di **usare simboli** per i passaggi matematici intermedi e sostituirli con valori numerici solo nel calcolo finale (ciò rende minima la possibilità di errori).
- **SI CONSIGLIA** di definire chiaramente i **simboli** delle varie quantità in gioco (esempio: sia "E" l'energia totale del corpo celeste...).

Buon lavoro !

Il Comitato Olimpico e la Giuria della Gara Interregionale delle Olimpiadi Italiane di Astronomia 2015