OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2012

GARA INTERREGIONALE - Categoria Senior

Problemi con soluzioni

Problema 1. Un sistema binario visuale si trova ad una distanza D=42 anni-luce dalla Terra. Le due stelle orbitano intorno al comune centro di massa ad una distanza reciproca d=26 UA. Si calcoli la separazione angolare, in secondi d'arco, delle due stelle viste dalla Terra.

Soluzione. Si assuma che la retta ideale congiungente le due stelle sia perpendicolare alla linea di vista, come nelle figure (a) e (b) riportate a lato .

Figura a

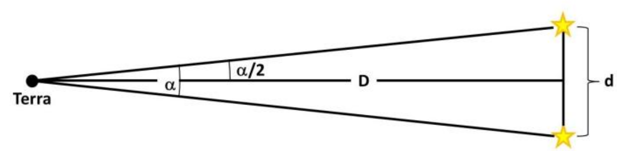
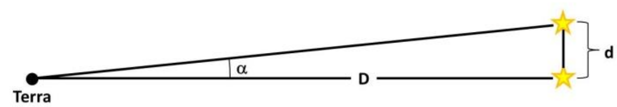


Figura b



Esprimiamo ora la distanza D in unità astronomiche:

D = 42 anni-luce = 42/3.26 pc =

= 12.88 pc = 12.88 x 206265 UA =

= 2657401.84 UA

Per questo valore, si può assumere che esso sia la distanza tra la Terra ed una delle due stelle (figura (b)) oppure la distanza tra la Terra ed il punto centrale della loro congiungente (figura (a)).

Nel primo caso (figura (b)) vale la relazione:

$$\tan(\alpha) = d / D$$

da cui

$$\alpha = \arctan (d / D)$$

ovvero

$$\alpha = \arctan (d / D) = \arctan [26 / 2657401.84] = 5.6058 \times 10^{-4} \text{ gradi} .$$

Nel secondo caso (figura (a)) vale invece la relazione:

$$\tan(\alpha/2) = (d/2) / D$$

da cui

$$\alpha/2 = \arctan (d / 2D)$$

ovvero

*α = 2 * arctan (d / 2D) = 2 * arctan [26 / (2*2657401.84)] = 5.6058 x 10^{-4} gradi .*

Come si vede, il risultato è lo stesso: ciò è dovuto alla estrema piccolezza dell'angolo α.

In definitiva, la separazione angolare è pari a

α = 5.6058 x 10^{-4} gradi · 3600 ″/grado = 2.02″ .

Si noti infine che, sempre per la piccolezza del rapporto d/D, si può utilizzare anche la formula approssimata che non richiede l'utilizzo della tangente trigonometrica:

α = d / D = 26 / 2657401.84 = 9.78399 x 10^{-6} radianti

*= 9.78399 x 10^{-6} radianti * 206264.81 ″/radiante = 2.02″ .*

Problema 2. Vi affacciate alla finestra della vostra casa (in Italia) di mattina e vedete la Luna illuminata a metà. La Luna è al primo o ultimo (terzo) quarto? A che ora tramonta? Motivate le risposte e disegnate come vi appare la Luna, indicando i punti cardinali.

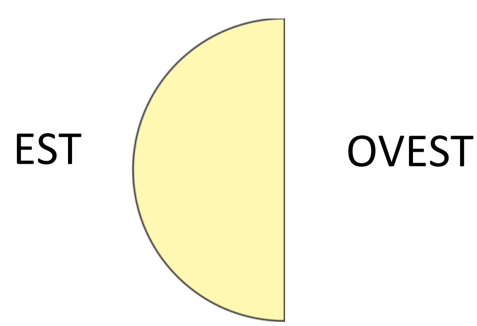
Soluzione. La sequenza delle fasi lunari è Luna nuova, primo quarto, Luna piena e ultimo quarto.

La Luna, durante le varie fasi, sorge, culmina e tramonta a ore differenti a causa del suo moto di rivoluzione attorno alla Terra: la vediamo muoversi verso est tra le costellazioni e quindi sorgere e tramontare un po' più tardi ogni giorno.

La Luna ci appare nuova quando sorge e tramonta assieme al Sole (sorge alle 6:00 e tramonta alle 18:00), al primo quarto essa è 90° a est del Sole (sorge alle 12:00 e tramonta alle 24:00), piena quando è opposta al Sole (sorge alle 18:00 e tramonta alle 6:00) e all'ultimo quarto quando è 90° a ovest del Sole (sorge alle 24:00 e tramonta alle 12:00).

Da questi dati ricaviamo che la Luna illuminata per metà visibile di mattina è all'ultimo quarto e tramonta alle 12:00.

All'ultimo quarto la Luna è a ovest del Sole, quindi quest'ultimo illumina la parte rivolta verso est:



Problema 3. Una supergigante rossa si trova alla distanza di 13000 a.l. dal Sole ed ha una magnitudine visuale apparente m = 8. Si calcolino: 1) la sua magnitudine visuale assoluta; 2) a quale distanza massima dal Sole dovrebbe trovarsi per essere la stella più luminosa del cielo; esprimete il risultato in anni luce ed in parsec.

Soluzione. *Dalla relazione $M = m + 5 - 5 \log d$ ricaviamo la magnitudine assoluta della stella (13000 anni luce = 13000 / 3.26 = 3988 pc) che risulta*

$$M = 8 + 5 - 5\log(3988) = 13 - 18.00 = -5 .$$

Utilizziamo ora la stessa relazione ponendo $m = -1.46$ (magnitudine visuale di Sirio). Otteniamo

$$-5 = -1.46 + 5 - 5\log(d)$$

da cui

$$\log(d) = (5 - 1.46 + 5) / 5 = 8.54 / 5 = 1.708$$

e quindi, in definitiva,

$$d^{(rif.\ sirio)} = 10^{1.708} = 51.1 \text{ pc} = 167 \text{ a.l.}$$

Possiamo tuttavia considerare il Sole come stella più luminosa del cielo. In tal caso occorre utilizzare la magnitudine apparente del Sole, $m = -26.8$, per ottenere:

$$-5 = -26.8 + 5 - 5\log(d)$$

da cui

$$\log(d) = (5 - 26.8 + 5) / 5 = -16.8 / 5 = -3.36$$

e quindi, in definitiva,

$$d^{(rif.\ sole)} = 10^{-3.36} = 4.365 \times 10^{-4} \text{ pc} = 90.04 \text{ u.a.}$$

In conclusione, affinché questa stella risulti la più luminosa del cielo <u>notturno</u> (riferimento: Sirio), la sua distanza dovrebbe essere inferiore a 167 anni luce, mentre per essere la più luminosa di <u>tutto</u> il cielo (riferimento: Sole), la sua distanza dovrebbe essere inferiore a circa 90 unità astronomiche.

Problema 4. Il periodo di rotazione di Giove attorno al suo asse è di 9.92 ore. Un satellite artificiale gira attorno al pianeta in orbita equatoriale e con lo stesso periodo. A che distanza si trova dalla superficie? (Raggio equatoriale di Giove R = 71492 km).

Soluzione. *La III Legge di Keplero ci dice che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita del satellite D (ovvero la sua distanza media dal centro del pianeta) ed il quadrato del suo periodo di rivoluzione T è costante e dipende dalla massa di Giove:*

$$D^3 / T^2 = GM / 4\pi^2$$

dove G è la costante di gravitazione universale ($G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}$).

Ne ricaviamo immediatamente la distanza D dal centro di Giove (T = 9.92 ore = 35712 s):

$$D = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}\,T^2} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.899 \cdot 10^{27} \cdot 35712^2}{4 \cdot 9.8596}} = 160000\ km$$

e, per sottrazione del raggio (equatoriale) di Giove, la distanza d dalla superficie del pianeta:

$d = D - R = 160028 - 71492\ km = 88508\ km$.

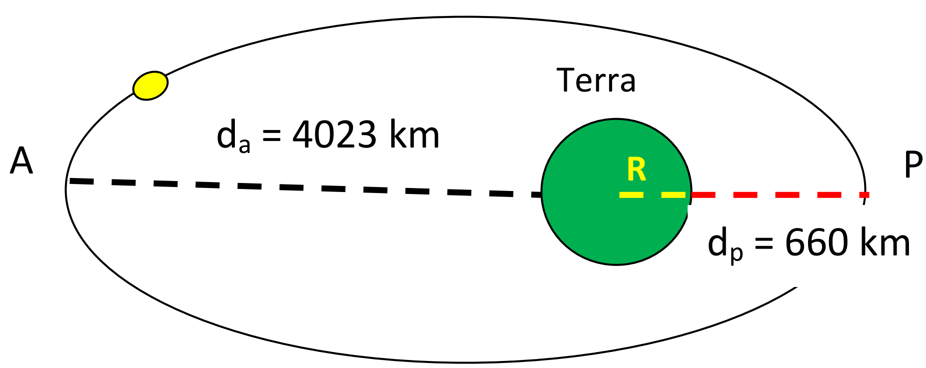
Problema 5. Un satellite artificiale ha un periodo di rivoluzione intorno alla Terra di 134 minuti. La sua orbita è ellittica e le distanze del satellite dalla superficie terrestre sono al perigeo d_p = 660 km, ed all'apogeo d_a = 4023 km. Ricordando che $G=6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$, si determini:

1. la massa della Terra;
2. la massa della Terra rispetto a quella del Sole.

<u>Soluzione.</u> *Per quanto riguarda il sistema Terra – Satellite sarà:*

$AP = d_a + 2R + d_p = 4023 + 2 \times 6372.8 + 660 = 17427.8\ km$

da cui segue: $a_S = AP/2 = 8714.3$ km.
La massa del satellite è trascurabile rispetto alla massa della Terra, così come la massa della Terra è trascurabile rispetto alla massa del Sole.



Applichiamo la terza legge di Keplero ai due sistemi:

Sistema Terra – satellite: $(P^2/a^3)_{Sat} = (4\pi^2/GM_{Terra})$ *(espressione 1)*

Sistema Terra – Sole: $(P^2/a^3)_{Terra} = (4\pi^2/GM_{Sole})$ *(espressione 2)*

Se ne ricava, esprimendo i periodi in secondi ed i semiassi in metri:

$M_{Terra} = (4\pi^2 /G) \times (a^3/P^2)_{Sat} = (4\pi^2 /6.67\times10^{-11}) \times [(8.71\times10^6)^3/(8040)^2) = 6.05 \times 10^{24}$ kg

$M_{Sole} = (4\pi^2 /G) \times (a^3/P^2)_{Sole} = (4\pi^2 /6.67\times10^{-11}) \times [(1.496\times10^{11})^3/(3.16\times10^7)^2) = 1.99 \times 10^{30}$ kg

Il rapporto di esse ci dà la massa della Terra relativamente a quella del Sole:

$$M_{Terra} / M_{Sole} = 3.04 \times 10^{-6}$$

Alternativamente, si può risalire a questo rapporto senza dover necessariamente conoscere il valore della costante di gravitazione universale G. Esprimendo infatti membro a membro il rapporto tra l'espressione e l'espressione 2, otteniamo:

$$(P^2/a^3)_{Terra} / (P^2/a^3)_{Sat} = (M_{Sole} / M_{Terra})$$

da cui segue:

$$(P_{Terra}/P_{Sat})^2 \times (a_{Sat}/a_{Terra})^3 = (M_{Sole} / M_{Terra})$$

ovvero, esprimendo tutti i periodi in minuti ed i semiassi in km,

$$(5.26 \times 10^5 / 134)^2 \times (8714.3 / 1.496 \times 10^8)^3 = (M_{Sole} / M_{Terra})$$

da cui segue

$$M_{Terra} / M_{Sole} = (8714.3 / 1.496 \times 10^8)^3 \times (5.26 \times 10^5 / 134)^2 = 3.04 \times 10^{-6}$$