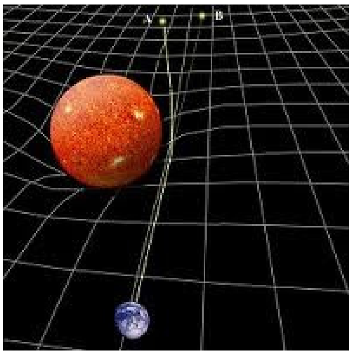
Olimpiadi Italiane di Astronomia 2011

Finale Nazionale

Reggio Calabria 17 Aprile 2011

Prova Teorica - Categoria <u>Senior</u>



Problema 1.
La teoria della relatività generale permette di calcolare l'angolo di deviazione di un raggio luminoso che sfiora la superficie di un corpo di massa M e raggio R rispetto al suo cammino indisturbato. In base a tale teoria, l'angolo, in radianti, è dato dall'equazione:

$$\delta = \frac{4GM}{Rc^2}$$

Calcolare δ in radianti e in gradi nel caso in cui si abbia:
(1) una nana bianca con $M=1.5 \cdot 10^{30}$ kg e R=4000 km;
(2) una stella di neutroni con $M=2.5 \cdot 10^{30}$ kg e R=25 km.

Soluzione.
Nel caso della nana bianca si ricava

$$\delta_1 = \frac{4GM}{Rc^2} = \frac{4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{30}}{4 \cdot 10^6 (3 \cdot 10^8)^2} = 0{,}0011\, rad = 3{,}8'$$

Per la stella di neutroni si ottiene

$$\delta_2 = \frac{4GM}{Rc^2} = \frac{4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{30}}{2{,}5 \cdot 10^4 (3 \cdot 10^8)^2} = 0{,}2964\, rad = 17^{\circ}$$

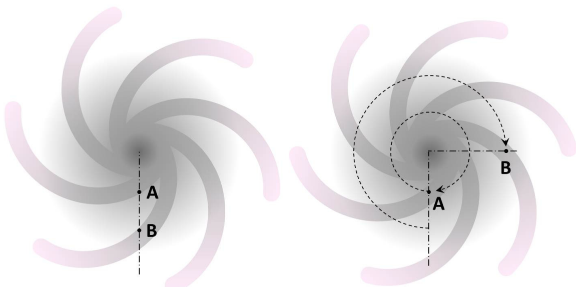
Problema 2.
Si considerino due stelle A e B appartenenti alla Via Lattea. La prima stella si trova a 6 kpc dal centro galattico e compie una rivoluzione completa intorno a esso in 180 milioni di anni. La seconda, invece, dista dal centro galattico 10 kpc e compie una rivoluzione completa attorno a esso in 240 milioni di anni. A una certa epoca t_0 le due stelle sono allineate con il centro galattico e la stella A, vista dalla stella B, ha una magnitudine apparente m_A=15.6. Si calcoli quale sarà la magnitudine apparente della stella A, vista dalla stella B, quando la stella A avrà effettuato una rivoluzione completa attorno al centro galattico. Si supponga che le due stelle non subiscano alcun cambiamento di tipo evolutivo, né che siano presenti nubi di gas o polveri interposte tra di esse.

Soluzione. Al tempo t_0 le due stelle sono allineate con il centro galattico e la loro distanza vale:

d = 10 kpc – 6 kpc = 4 kpc = 4000 pc

È dunque possibile calcolare la magnitudine assoluta M_A della stella A, utilizzando la formula:

$$M = m - 5 \log_{10} d + 5$$



$t = t_0$ **$t = t_0 + 180$ My**

dove *m* è la magnitudine apparente della stella A vista dalla stella B e *d* la distanza tra le due stelle espressa in parsec. Si ricava:

$$M_A = 15.6 - 5 \log_{10} (4000) + 5 = 2.59$$

Consideriamo ora cosa accade quando la stella A ha eseguito una rivoluzione completa intorno al centro galattico. Essendo trascorsi 180 milioni di anni, la stella B avrà percorso un tratto pari a 180/240 = 3/4 di rivoluzione completa, ovvero avrà percorso un angolo di 270°. Detto O il centro galattico, la nuova configurazione vede le stelle A e B poste ai vertici di un triangolo rettangolo con angolo retto in O ed ipotenusa AB. La nuova distanza *d′* tra le due stelle è pari alla lunghezza di questa ipotenusa, ovvero:

$$d' = [\ 10^2 + 6^2\ ]^{1/2} = 11{,}662 \text{ kpc} = 11662 \text{ pc}$$

Questo ci permette di calcolare immediatamente la nuova magnitudine apparente della stella A vista dalla stella B, secondo una formula analoga a quella precedentemente utilizzata:

$$m = M + 5 \log_{10} d - 5$$

ovvero $m_A' = 2.59 + 5 \log_{10} (11662) - 5 = 17.92$

Problema 3.
L'Asteroide 704 "Interamnia", scoperto da V. Cerulli nel 1910, si muove intorno al Sole su un'orbita stabile, avente eccentricità e = 0.151 e periodo P = 5.35 anni. Si dica se l'asteroide costituisce una minaccia per la Terra e si spieghi il perché.

Soluzione. Il semiasse maggiore *a* dell'orbita dell'asteroide si trova applicando la III legge di Keplero:

$$a^3 \text{ (u.a.)} = T^2 \text{ (anni)} = (5.35)^2 = 28.6225$$

da cui: $a = (28.6225)^{1/3} = 3.059$ UA

Questo primo risultato ci fornisce il valore della somma delle distanze all'afelio (d_a) e al perielio (d_p) giacché:

$$d_a + d_p = 2a, \qquad \text{ovvero} \qquad d_a + d_p = 6.118 \text{ UA}$$

Dalla definizione di eccentricità, del resto, sappiamo che:

$$e = (d_a - d_p) / (d_a + d_p)$$

per cui possiamo subito ricavare la differenza delle due distanze d_a e d_p:

$$d_a - d_p = e * (d_a + d_p) = 0.151 * 6.118 \text{ u.a.} = 0.924 \text{ UA}$$

Abbiamo quindi i dati per mettere a sistema le due espressioni d_a+d_p e d_a-d_p, da cui ricaviamo facilmente le distanze dal Sole dell'asteroide 704 Interamnia al perielio e all'afelio:

$$d_p = [(d_a+d_p) - (d_a-d_p)]/2 = (6.118 - 0.924)/2 = 2.597 \text{ UA}$$

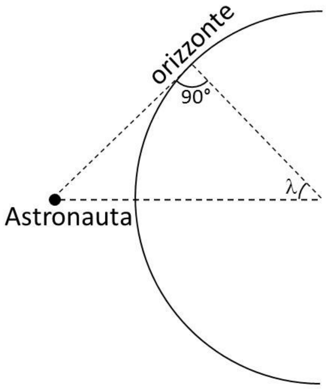
$$d_a = [(d_a+d_p) + (d_a-d_p)]/2 = (6.118 + 0.924)/2 = 3.521 \text{ UA}$$

Come si vede, la minima distanza dell'asteroide dal Sole è superiore ad 1 UA: dunque la sua orbita, in quanto stabile (come specificato dal problema), non incrocerà mai l'orbita terrestre, e quindi l'asteroide 704 Interamnia NON costituisce una minaccia per la Terra.

Problema 4.

Il 12 aprile ricorreva il 50° anniversario del primo volo umano nello spazio compiuto dal cosmonauta russo Yuri Gagarin. Per ricordare questa storica impresa considerate il seguente problema. Un astronauta si trova a bordo di una sonda spaziale che orbita intorno alla Terra, esattamente sopra l'equatore, a una distanza di 2642 km dalla superficie. L'astronauta vuole fare una foto che ritragga il continente europeo, ma si accorge di non poterlo fotografare per intero. In particolare, motivando adeguatamente la risposta, si dica se l'astronauta riesce a includere nella stessa foto Roma (longitudine 12° 32′ 28″.97 E, latitudine 41° 52′ 33″.19 N) e Parigi (longitudine 02° 20′ 58″.52 E, latitudine 48° 41′ 55″.67 N). Trascurate gli effetti dovuti all'atmosfera terrestre.

Soluzione.



Si consideri la figura a destra, che rappresenta, nel piano del meridiano passante per l'astronauta, il triangolo formato dall'astronauta stesso, dal centro della terra e dal punto di massima latitudine osservabile (che è il limite dell'orizzonte dell'astronauta). L'angolo sul centro della Terra coincide con la latitudine massima osservabile mentre l'angolo sul punto di massima latitudine è retto. Il triangolo astronauta-centro-orizzonte è dunque un triangolo rettangolo.

In base ai dati del problema, la distanza dell'astronauta dal centro della Terra è pari a D= 6378+2642 = 9020 km che corrisponde, nella figura, all'ipotenusa del triangolo.

Sempre dalla figura, notiamo che il cateto centro della Terra-orizzonte è pari al raggio terrestre (6378 Km), per cui si può calcolare la lunghezza dell'altro cateto con il teorema di Pitagora: astronauta-orizzonte = √ (90202 – 63782) = 6378,2 km.

Il triangolo astronauta - centro della Terra - orizzonte si può quindi approssimare molto bene con un triangolo rettangolo isoscele. Questo ci porta a concludere che la massima latitudine che la foto può coprire è 45°: pertanto Roma rientra nella foto, Parigi invece no.

Problema 5.

Vi trovate in vacanza nell'Oceano Atlantico su una barca a vela. È estate, e vi state godendo l'ultimo Sole, quando Timoteo, il navigatore, vi da la spiacevole notizia che si è rotto il GPS. Il guaio è che stavate così bene che sono parecchi giorni che non fate più il punto nave, per cui non avete un'idea chiara di dove vi trovate. Sapete soltanto di essere a Ovest delle Isole Canarie. L'indomani all'alba un magnifico Sole spunta a Est. Che fare? Susanna ha un'idea. Il cellulare satellitare funziona, per fortuna. Chiamate casa, in Italia, e dite loro di richiamarvi a mezzogiorno preciso. Nel momento in cui vi richiamano, segnate l'ora (l'orologio funziona ancora!) e aspettate che, anche dove siete voi, arrivi mezzogiorno.

Quando il Sole indica mezzogiorno, sono trascorse 3 ore e 10 minuti, rispetto al segnale dall'Italia. Non appena fa buio, misurate l'altezza della stella polare sull'orizzonte. L'altezza della stella polare è di 32° 12'. Sapendo che la longitudine della città dalla quale vi hanno chiamato è 12° 30' E, si risponda ai seguenti quesiti:

1) Perché, nella posizione a Ovest delle Isole Canarie, il vostro mezzogiorno viene più di tre ore dopo quello della città in Italia?

2) Come si fa a individuare il mezzogiorno, usando il Sole, quando si è in mezzo al mare e non si conosce bene la propria posizione?
3) Calcolare il punto nave (latitudine e longitudine) della vostra barca.
4) Quando non c'erano ancora i telefoni, ma solo gli orologi, sapete come facevano i marinai a calcolare la longitudine?

Soluzione.

1. Il Sole passa per il meridiano locale a mezzogiorno. Poiché la Terra si muove in senso antiorario, guardandola dall'asse polare Nord, e le Isole Canarie sono a Ovest rispetto all'Italia, è facile capire che tutti gli oggetti celesti, le stelle, il Sole e naturalmente la Luna, passano al meridiano prima in Italia e poi per le Isole Canarie. Andando verso Ovest, infatti, l'ora locale anticipa.
2. A mezzogiorno, il Sole ha la massima altezza sull'orizzonte, ed è orientato esattamente in direzione Sud. Con la bussola magnetica, si può individuare la direzione Sud, ma con l'indeterminazione data dalla discrepanza fra polo geografico e polo magnetico. L'altezza massima può essere misurata con un teodolite, ma ha anch'essa un certo grado di indeterminazione.
3. Per fare questo calcolo, assumiamo che il giorno solare sia esattamente di 24 ore. In realtà di 24 ore è il cosiddetto giorno solare medio. A causa dell'ellitticità dell'orbita della terra intorno al Sole, il giorno solare vero cambia durante l'anno, da 24 ore e 30 secondi a metà dicembre, a 23 ore, 59 minuti e 49 secondi a metà settembre. Se si trascura questo effetto, e si converte il tempo di 3h e 10m in un numero decimale (3h 10m equivale a 3.167 ore, approssimando alla terza cifra decimale) nel passaggio dal mezzogiorno nella città italiana, a quello della barca, la Terra compie una rotazione, in senso antiorario, pari a $\beta = 360° \cdot 3.167/24 = 47.505°$ cioè 47° 30' 18". Poiché le Isole Canarie sono a Ovest dell'Italia, quest'angolo deve essere SOTTRATTO alla longitudine della città in Italia, per ottenere la longitudine effettiva della barca rispetto al meridiano di Greenwich: longitudine barca = 12° 30' - 47° 30' 18" = 12.5° - 47.505° = -35.505° = 324.495° E, cioè 324° 29' 42" E, usando la convenzione di considerare le longitudini positive, ma indicando se sono riferite a Ovest o a Est di Greenwich. Per la latitudine, essa coincide quasi esattamente con l'altezza della Stella Polare.
4. L'unico modo per calcolare la longitudine, è di portarsi un orologio abbastanza preciso. Se l'orologio (O1) segna l'ora del porto di partenza, e se siamo in grado, nel posto in cui siamo, di calcolare l'ora locale, per esempio, utilizzando un altro orologio (O2) che possa essere sincronizzato con il passaggio del Sole al mezzogiorno locale, dalla differenza di ora tra i due orologi, basterà fare: D = 360° * (ora(O1) – ora(O2))/24. Questo numero è la differenza in longitudine con il porto di partenza. Se positiva, siamo a Ovest del porto. Se negativa, siamo a Est. Fino a circa metà del Settecento, gli orologi erano talmente imprecisi, sensibili al moto della nave e alle condizioni atmosferiche che la conoscenza della longitudine era estremamente incerta.

Olimpiadi Italiane di Astronomia 2011

Finale Nazionale

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

Raggio medio	695475 km		*Età stimata*	$4{,}57 \times 10^{9}$ anni
Massa	$1{,}9891 \times 10^{30}$ kg		*Classe spettrale*	G2 V
Temperatura superficiale	5778 K		*Posizione nel diagramma di Hertzsprung-Russell*	Sequenza principale
Magnitudine apparente dalla Terra	- 26,8		*Distanza media dal centro galattico*	27000 anni-luce
Magnitudine assoluta	+ 4,83		*Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico*	$2{,}5 \times 10^{8}$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	Mercurio	*Venere*	*Terra*	*Luna*	*Marte*	*Giove*	*Saturno*	*Urano*	*Nettuno*
Raggio medio (km)	2439,7	6051,85	6372,80	1738	3389,93	69173,25	57316	25266	24552
Massa (kg)	$3{,}302 \times 10^{23}$	$4{,}868 \times 10^{24}$	$5{,}974 \times 10^{24}$	$7{,}348 \times 10^{22}$	$6{,}418 \times 10^{23}$	$1{,}899 \times 10^{27}$	$5{,}685 \times 10^{26}$	$8{,}683 \times 10^{25}$	$1{,}024 \times 10^{26}$
Raggio orbitale medio (km)	$5{,}79 \times 10^{7}$	$1{,}082 \times 10^{8}$	$1{,}496 \times 10^{8}$	384400	$2{,}28 \times 10^{8}$	$7{,}78 \times 10^{8}$	$1{,}43 \times 10^{9}$	$2{,}87 \times 10^{9}$	$4{,}50 \times 10^{9}$
Periodo orbitale	87,97 ^{g}	224,70 ^{g}	1 ^{a}	27,32 ^{g}	1,88 ^{a}	11,86 ^{a}	29,45 ^{a}	84,07 ^{a}	164,88 ^{a}
Tipo	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie per figure geometriche notevoli

	Triangolo	*Rettangolo*	*Quadrato*	*Cerchio*	*Ellisse*	*Sfera*
Area	$b\,h / 2$	$\ell_1\,\ell_2$	ℓ^{2}	πR^2	$\pi\,a\,b$	$4\pi R^2$