



OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2019

Finale Nazionale – 16 Aprile

Prova Teorica - Categoria Junior 2

1. La supernova SN1987A

Il 23 febbraio 1987 è stata osservata l'esplosione della supernova SN1987A nella grande nube di Magellano, alla distanza di $5.15 \cdot 10^4$ pc dal Sistema Solare. I suoi resti si espandono a una velocità costante di circa 1000 km/s. Calcolare il diametro angolare attuale dei resti della supernova, osservato dalla Terra ed espresso in secondi d'arco.

Soluzione:

Il raggio del resto della supernova SN1987A aumenta in un anno di:

$$\Delta r = v \cdot t = 1000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 31.56 \cdot 10^6 \text{ s} = 31.56 \cdot 10^9 \text{ km}$$

Dal 23 febbraio 1987 a oggi sono passati circa 32.17 anni, quindi il raggio attuale del resto di supernova è:

$$R = \Delta r \cdot \Delta t = 31.56 \cdot 10^9 \text{ km} \cdot 32.17 \cong 1.015 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

e il suo diametro (lineare) "D" vale:

$$D = 2 \cdot R \cong 2.03 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

La distanza "d" della Supernova vale: $d = 5.15 \cdot 10^4 \text{ pc} = 1.68 \cdot 10^5 \text{ anni luce} = 1.59 \cdot 10^{18} \text{ km}$.

Il diametro angolare attuale (α) del resto di supernova è dato dalla relazione:

$$\alpha = \arctg \frac{D}{d} = \arctg \frac{2.03 \cdot 10^{12} \text{ km}}{1.59 \cdot 10^{18} \text{ km}} \cong 7 \cdot 10^{-5} \cong 0''.263$$

2. Osservazioni di ζ Boötis

ζ Boötis è una stella binaria situata alla distanza di 180 anni luce dal Sistema Solare, composta da 2 stelle identiche, entrambe appartenenti alla sequenza principale del diagramma HR. La magnitudine apparente totale del sistema è $m_{\text{tot}} = 3.79$. La separazione angolare tra le due componenti, viste dalla Terra, è $\alpha = 1.2''$. Questo sistema è osservato alla lunghezza d'onda $\lambda = 5500 \text{ \AA}$.

1. Che diametro minimo deve avere un telescopio per riuscire a risolvere il sistema binario?
2. Se la lunghezza focale del telescopio è 1 m e il potere risolutivo dell'occhio è 2 primi d'arco ($2''$), quanto deve essere la lunghezza focale dell'oculare per riuscire a osservare le due componenti?
3. Quanto vale la magnitudine assoluta di ciascuna delle due stelle del sistema binario?

Soluzione:

1) La risoluzione di un telescopio di apertura "D" per osservazioni alla lunghezza d'onda " λ " è data da:

$$\theta = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D} \quad \text{con } \theta \text{ in radianti}, \quad \theta = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D} \cdot 206265 \quad \text{con } \theta \text{ in secondi d'arco}$$

$$\text{Avremo quindi: } D = \frac{1.22 \cdot \lambda \cdot 206265}{\theta} = \frac{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 206265}{1.2''} \cong 0.12 \text{ m} = 12 \text{ cm}$$

Notiamo che la separazione angolare tra le due stelle è maggiore del valore medio del seeing (circa $1''$) che si registra in buona parte delle località sulla superficie della Terra. Possiamo quindi affermare che le due stelle possono essere "risolte" con osservazioni da Terra.

- 2) Il rapporto tra la lunghezza focale del telescopio (F) e quella dell'oculare utilizzato (f) fornisce l'ingrandimento (I):

$$I = \frac{F}{f}$$

Dobbiamo quindi calcolare quante volte deve essere ingrandita l'immagine del sistema binario per permettere al nostro occhio di risolvere le due componenti:

$$I = \frac{\text{risoluzione occhio}}{\text{separazione angolare}} = \frac{2'}{1.2''} = \frac{120''}{1.2''} = 100$$

La focale dell'oculare da utilizzare deve quindi essere pari o inferiore a:

$$f = \frac{F}{I} = \frac{1000 \text{ mm}}{100} = 10 \text{ mm}$$

- 3) Sappiamo che le due componenti di ζ Boötis hanno magnitudini apparenti identiche $m_1 = m_2 = m$ e che la magnitudine totale del sistema è $m_{\text{tot}} = 3.79$.

Dalla relazione che fornisce la somma di due magnitudini abbiamo:

$$m_{\text{tot}} = -2.5 \cdot \log (10^{-0.4m} + 10^{-0.4m}) = -2.5 \cdot \log (2 \cdot 10^{-0.4m}) = -2.5 \cdot \log (2) - 2.5 \cdot \log (10^{-0.4m})$$

$$\log (10^{-0.4m}) = \frac{-m_{\text{tot}} - 2.5 \cdot \log (2)}{2.5} = \frac{-3.79 - 0.75}{2.5} = -1.82$$

$$10^{-0.4m} = 10^{-1.82} \quad \text{da cui ricaviamo} \quad m = \frac{-1.82}{-0.4} = 4.55$$

Data la magnitudine apparente di ciascuna delle due componenti, calcoliamo la loro magnitudine assoluta dalla relazione: $M = m - 5 \log d + 5$, esprimendo la distanza in parsec ($d = 180$ anni luce = 55.2 parsec):

$$M = m - 5 \log d + 5 = 4.55 - 5 \log (55.2) + 5 = 4.55 - 8.71 + 5 = 0.84$$

3. Dracula incenerito dalla Luna piena



Una delle principali caratteristiche dei vampiri è che essi si inceneriscono se esposti alla luce del Sole. Nella vignetta qui a fianco Dracula è polverizzato dalla luce della Luna piena, che riflette la luce del Sole.

- 1) Considerando che la Luna riflette solo il 7% circa della luce del Sole (l'albedo media "A" della Luna è infatti $A \cong 0.07$) e supponendo che Dracula riesca a sopportare senza incenerirsi un flusso di energia pari ad appena mezzo milionesimo ($0.5 \cdot 10^{-6}$) del flusso del Sole che arriva sulla Terra, dire se la situazione della vignetta può effettivamente verificarsi. Considerare la distanza Luna-Sole uguale alla distanza Terra-Sole.
- 2) Se il sistema Terra-Luna, mantenendo immutate le sue caratteristiche, si trovasse a una distanza dal Sole pari a quella di Marte, che ne sarebbe di Dracula in una notte di Luna piena?

Soluzione:

- 1) Calcoliamo il flusso di energia solare riflessa dalla Luna piena che arriva sulla Terra. Occorre per prima cosa calcolare la costante solare (α), ovvero la quantità di energia emessa dal Sole che arriva sulla Terra per unità di tempo e unità di superficie (quindi una potenza per unità di superficie), misurata sulla superficie superiore dell'atmosfera terrestre, su un piano perpendicolare ai raggi solari.

Dalla legge di Stefan-Boltzmann, detta "D_T" la distanza media Terra-Sole, otteniamo:

$$\alpha = \frac{4 \pi R_{\text{Sole}}^2 \sigma T_{\text{Sole}}^4}{4 \pi D_T^2} = \frac{4 \pi \cdot 4.837 \cdot 10^{17} \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}}{4 \pi \cdot 2.238 \cdot 10^{22}} \cong 1366 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

che è anche il valore del flusso del Sole su un 1 m^2 della superficie della Luna avendo assunto i due corpi alla stessa distanza dal Sole.

La Luna è piena, ma poiché il flusso si riferisce a superfici perpendicolari alla direzione della luce in arrivo, l'area interessata dall'arrivo del flusso solare e dalla successiva riflessione equivale alla proiezione di una semisfera su un piano perpendicolare alla direzione di arrivo della radiazione. Questa proiezione è un cerchio.

La potenza totale riflessa (W_{RIF}) dalla superficie della Luna si ottiene moltiplicando il valore della costante solare per l'area proiettata della superficie lunare (ovvero la potenza ricevuta su tutta la superficie proiettata, W_{RIC}) per l'albedo:

$$W_{\text{RIF}} = W_{\text{RIC}} \cdot A = \alpha \cdot \pi R_{\text{LUNA}}^2 \cdot A = 1366 \cdot \pi \cdot 3.021 \cdot 10^{12} \cdot 0.07 \cong 9.08 \cdot 10^{14} \text{ W}$$

Questa potenza riflessa si distribuisce su mezzo angolo solido totale (perché è riflessa da una sola faccia), cioè si distribuisce su semisfere concentriche sempre più grandi a partire dalla Luna. Alla distanza della Terra (d) su 1 m^2 si riceverà allora in media dalla Luna un flusso (F_{RIC}) dato da:

$$F_{\text{RIC}} = \frac{W_{\text{RIF}}}{2 \pi d^2} = \frac{9.08 \cdot 10^{14}}{2 \pi \cdot 1.478 \cdot 10^{17}} \cong 9.78 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cong 0.716 \cdot 10^{-6} \alpha$$

Che significa che dalla Luna in una notte di Luna piena sulla Terra si riceve un flusso che è quasi un milionesimo di quello che si riceve dal Sole. Dato che nella nostra ipotesi Dracula riesce a sopportare senza incenerirsi soltanto mezzo milionesimo ($0.5 \cdot 10^{-6}$) del flusso che arriva dal Sole, la situazione nella vignetta è corretta. La luce della Luna piena polverizza effettivamente il povero vampiro.

- 2) Calcoliamo adesso il valore della costante solare (β) alla distanza (D_M) di Marte:

$$\beta = \frac{4 \pi R_{\text{Sole}}^2 \sigma T_{\text{Sole}}^4}{4 \pi D_M^2} = \frac{4 \pi \cdot 4.837 \cdot 10^{17} \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \cdot 1.115 \cdot 10^{15}}{4 \pi \cdot 5.194 \cdot 10^{22}} \cong 589 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cong 0.43 \alpha$$

In questo caso la potenza riflessa dalla Luna (W_{rif}) sarebbe:

$$W_{\text{rif}} = W_{\text{ric}} \cdot A = \beta \cdot \pi R_{\text{LUNA}}^2 \cdot A = 589 \cdot \pi \cdot 3.021 \cdot 10^{12} \cdot 0.07 \cong 3.91 \cdot 10^{14} \text{ W}$$

e sulla Terra arriverebbe dalla Luna un flusso:

$$F_{\text{ric}} = \frac{W_{\text{rif}}}{2 \pi d^2} = \frac{3.91 \cdot 10^{14}}{2 \pi \cdot 1.478 \cdot 10^{17}} \cong 4.21 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cong 0.308 \cdot 10^{-6} \alpha$$

Quindi se il sistema Terra-Luna fosse alla distanza di Marte, Dracula sarebbe salvo!

4. Il sistema planetario intorno alla stella Trappist-1

Il 22 febbraio 2017 la NASA ha annunciato di aver scoperto intorno alla stella Trappist-1 altri quattro pianeti, oltre a quelli scoperti nel 2015, tre dei quali (T1-e, T1-f e T1-g) sono di tipo roccioso e hanno la particolarità di essere nella cosiddetta zona abitabile. La stella ha una massa pari all'8% di quella del Sole e un raggio di 0.114 volte quello solare. I tre pianeti "abitabili" hanno periodi orbitali di 6.10 giorni (T1-e), 9.20 giorni (T1-f) e 12.4 giorni (T1-g) e raggi rispettivamente di 0.92, 1.05 e 1.13 volte quello della Terra.

- 1) Calcolare i semiassi maggiori delle orbite dei tre pianeti;
- 2) supporre di osservare il sistema planetario dal pianeta T1-e e considerare orbite circolari e giacenti sullo stesso piano. Calcolare le dimensioni angolari della stella e dei pianeti T1-f e T1-g quando sono in opposizione;
- 3) verificare se dal pianeta T1-g è possibile osservare una eclisse totale della stella Trappist-1 a causa del transito di uno degli altri due pianeti davanti a essa.

Soluzione:

- 1) La massa della stella vale $M_s = 0.08 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1.59 \cdot 10^{29} \text{ kg}$. Poiché i pianeti sono di tipo roccioso e hanno raggi simili a quello della Terra, si può dedurre che abbiano una massa simile a quella della Terra, pari a circa $3.75 \cdot 10^{25}$ della massa di Trappist-1. Quindi la loro massa può essere trascurata

nel calcolo del semiasse maggiore dell'orbita che è dato da: $a = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_s}{4 \pi^2}}$.

Per i tre pianeti avremo:

$$a(T1e) = \sqrt[3]{\frac{2.78 \cdot 10^{11} \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.59 \cdot 10^{29}}{39.48}} \cong 4.21 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$a(T1f) = \sqrt[3]{\frac{6.32 \cdot 10^{11} \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.59 \cdot 10^{29}}{39.48}} \cong 5.54 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$a(T1g) = \sqrt[3]{\frac{1.15 \cdot 10^{12} \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.59 \cdot 10^{29}}{39.48}} \cong 6.76 \cdot 10^6 \text{ km}$$

2) La distanza dei due pianeti da T1-e quando si trovano in opposizione con Trappist-1 vale:

$$d(e - f) \cong 1.33 \cdot 10^6 \text{ km} \quad d(e - g) \cong 2.55 \cdot 10^6 \text{ km}$$

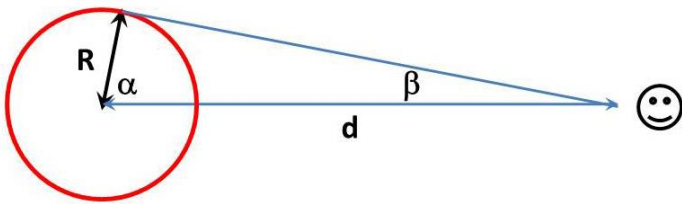
I raggi della stella e dei pianeti valgono:

$$R_S = 0.114 R_{\text{Sole}} \cong 79300 \text{ km}$$

$$R(T1e) = 0.92 R_{\text{Terra}} \cong 5870 \text{ km}$$

$$R(T1f) = 1.05 R_{\text{Terra}} \cong 6700 \text{ km}$$

$$R(T1g) = 1.13 R_{\text{Terra}} \cong 7200 \text{ km}$$



Le dimensioni angolari apparenti ($\gamma = 2 \beta$) di un corpo di raggio “R” posto alla distanza “d” da un osservatore, si ricavano dalla relazione: $\gamma = 2 \arcsen \frac{R}{d}$.

Quindi visti da T1-e le dimensioni della stella e dei due pianeti all’opposizione sono:

$$\gamma(\text{Trappist1}) = 2 \arcsen \frac{R_S}{a(T1e)} = 2 \arcsen \frac{79300 \text{ km}}{4.21 \cdot 10^6 \text{ km}} \cong 2^\circ.16$$

$$\gamma(T1f) = 2 \arcsen \frac{R(T1f)}{d(e - f)} = 2 \arcsen \frac{6700 \text{ km}}{1.33 \cdot 10^6 \text{ km}} \cong 0^\circ.58$$

$$\gamma(T1g) = 2 \arcsen \frac{R(T1g)}{d(e - g)} = 2 \arcsen \frac{7200 \text{ km}}{2.55 \cdot 10^6 \text{ km}} \cong 0^\circ.32$$

3) Un’eclisse totale di Trappist-1 potrebbe essere osservata da T1-g quando uno degli altri due pianeti si viene a trovare in congiunzione inferiore. In questo caso la distanza dei due pianeti da T1-g vale:

$$d_c(f - g) \cong 1.22 \cdot 10^6 \text{ km} \quad d_c(e - g) \cong 2.55 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Le dimensioni apparenti di Trappist-1, T1-e e T1-f visti da T1-g sono:

$$\gamma(\text{Trappist1}) = 2 \arcsen \frac{R_S}{a(T1g)} = 2 \arcsen \frac{79300 \text{ km}}{6.76 \cdot 10^6 \text{ km}} \cong 1^\circ.34$$

$$\gamma(T1e) = 2 \arcsen \frac{R(T1e)}{d(e - g)} = 2 \arcsen \frac{5870 \text{ km}}{2.55 \cdot 10^6 \text{ km}} \cong 0^\circ.26$$

$$\gamma(T1f) = 2 \arcsen \frac{R(T1f)}{d(f - g)} = 2 \arcsen \frac{6700 \text{ km}}{1.22 \cdot 10^6 \text{ km}} \cong 0^\circ.63$$

Quindi nessuna eclisse totale per un osservatore su T1-g può essere causata dal transito degli altri due pianeti sul disco di Trappist-1.

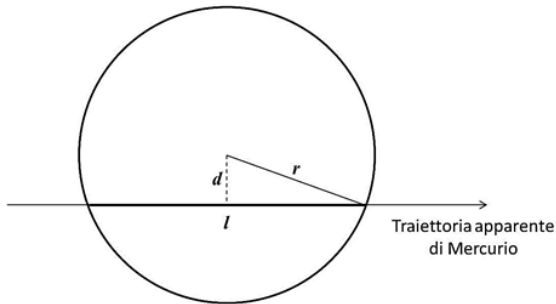
5. Il transito di Mercurio

Il 9 maggio 2016 è stato possibile osservare da molte regioni della Terra il transito del pianeta Mercurio sul disco solare. Sapendo che la minima distanza angolare osservata tra il centro del disco di Mercurio e il centro del disco solare è pari a 318 secondi d'arco, calcolare la durata del transito nei seguenti casi:

- 1) orbita di Mercurio circolare;
- 2) orbita reale di Mercurio con Mercurio al perielio al momento del centro del transito;
- 3) orbita reale di Mercurio con Mercurio all'afelio al momento del centro del transito.

In tutti e tre i casi assumere l'orbita della Terra circolare.

Soluzione:



La figura a sinistra mostra la geometria del transito di Mercurio, che passa a una distanza minima $d = 318''$ sotto il centro del disco solare. Conoscendo le dimensioni angolari del Sole visto dalla Terra si può calcolare la lunghezza angolare del tratto percorso da Mercurio durante il transito. Il raggio angolare del Sole è dato da:

$$r = \arcsen \frac{R_{\text{Sole}}}{1 \text{ UA}} = \arcsen \frac{695500 \text{ km}}{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}} \cong 0.266 \cong 959''$$

Si ha quindi: $l = 2 \sqrt{r^2 - d^2} \cong 2 \sqrt{920 \cdot 10^3 - 101 \cdot 10^3} \cong 1810'' \cong 30'.17$

- 1) Orbita di Mercurio circolare.

Calcoliamo il periodo sinodico di Mercurio visto dalla Terra (T_{MS}), che è legato al periodo siderale di Mercurio ($T_{\text{M}_{\text{sid}}}$) e della Terra (T_{Terra}) dalla relazione:

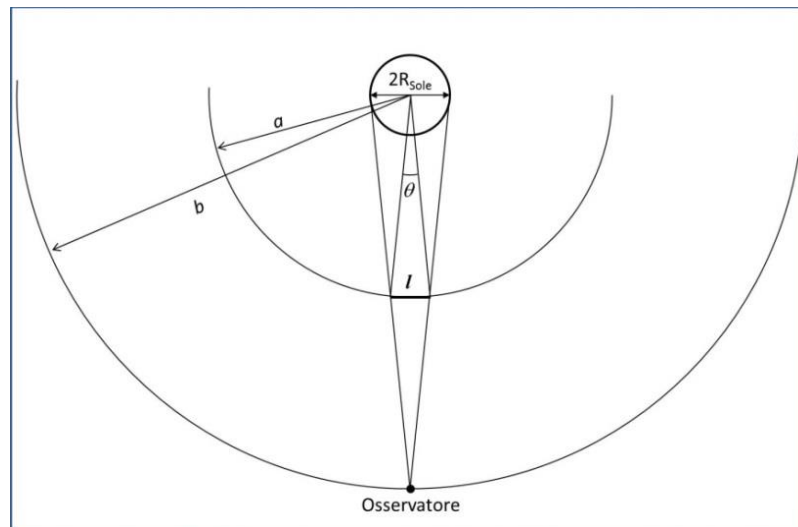
$$\frac{1}{T_{\text{MS}}} = \frac{1}{T_{\text{M}_{\text{sid}}}} - \frac{1}{T_{\text{Terra}}} = \frac{1}{87.969} - \frac{1}{365.26} \cong 8.62299 \cdot 10^{-3} \text{ g} \quad \text{da cui: } T_{\text{MS}} \cong 115.88 \text{ g} \cong 10.01 \cdot 10^6 \text{ s}$$

Calcoliamo ora la velocità angolare orbitale di Mercurio riferita al periodo sinodico, che quindi tiene conto del moto della Terra intorno al Sole durante il transito:

$$\omega_{\text{MS}} = \frac{2\pi}{T_{\text{MS}}} = \frac{2\pi}{10.01 \cdot 10^6 \text{ s}} \cong 6.277 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Nota: nel Sistema Internazionale le ampiezze degli angoli si misurano in radianti (rad), per cui la velocità angolare si misura in radianti al secondo (rad/s).

La geometria del problema è rappresentata nella seguente figura:



In essa il tratto di orbita “l” che, essendo piccolo rispetto alle dimensioni totali dell’orbita, possiamo approssimare a un segmento, è parte di due triangoli simili legati dalla seguente proporzione:

$$\frac{2 R_{\text{Sole}}}{b} = \frac{l}{b-a}$$

Il valore di “l” è legato all’angolo al centro θ dalla relazione rigorosa:

$$l = 2 a \tan \frac{\theta}{2}$$

Tuttavia, poiché abbiamo a che fare con angoli molto piccoli, possiamo usare l’approssimazione:

$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \tan \theta$ e infine approssimare il valore della funzione all’angolo: $\tan \theta = \theta$, con θ che risulterà espresso in radianti.

Ne segue la relazione:

$$\theta = \frac{l}{a}$$

Da cui ricaviamo che l’angolo θ sotteso da “l” visto dal centro del Sole è dato da:

$$\theta = \frac{2 R_{\text{Sole}} (b-a)}{b a} = 2 R_{\text{Sole}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 2 \cdot 695500 \text{ km} \cdot \left(\frac{1}{57.91 \cdot 10^6 \text{ km}} - \frac{1}{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}} \right) \cong 1.472 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

La durata del transito τ si ricava infine dal rapporto angolo/velocità angolare:

$$\tau = \frac{\theta}{\omega_{\text{MS}}} = \frac{1.472 \cdot 10^{-2} \text{ rad}}{6.277 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} = 23.41 \cdot 10^3 \text{ s} \cong 0.271 \text{ giorni} \cong 6.51 \text{ ore}$$

- 2) Per calcolare la durata del transito considerando l’orbita ellittica, consideriamo per primo il caso in cui Mercurio si trova all’afelio. La velocità orbitale (v_{af}) e la distanza dal Sole (b_{af}) sono date da:

$$v_{\text{af}} = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)} \quad b_{\text{af}} = a(1+e)$$

ed essendo: $v = \omega r$ otteniamo la velocità angolare all’afelio:

$$\omega_{\text{af}} = \sqrt{\frac{G M_{\text{Sole}} (1-e)}{a^3 (1+e)^3}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \cdot 0.7944}{1.942 \cdot 10^{32} \cdot 1.752}} \cong 5.568 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Per ottenere la velocità angolare sinodica all’afelio $\omega_{\text{af_sin}}$ da questo valore dobbiamo sottrarre la velocità angolare della Terra:

$$\omega_{\text{T}} = \frac{2\pi}{T_{\text{T}}} = \frac{2\pi}{365.26 \text{ g}} \cong \frac{2\pi}{31.56 \cdot 10^6 \text{ s}} \cong 1.991 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

E quindi:

$$\omega_{\text{af_sin}} = \omega_{\text{af}} - \omega_{\text{T}} = 5.568 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 1.991 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cong 3.577 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Infine dobbiamo calcolare il valore dell’angolo θ sotteso da “l” visto dal centro del Sole quando Mercurio è all’afelio:

$$\theta_{\text{af}} = 2 R_{\text{Sole}} \left(\frac{1}{a(1+e)} - \frac{1}{b} \right) = 2 \cdot 695500 \text{ km} \cdot \left(\frac{1}{69.82 \cdot 10^6 \text{ km}} - \frac{1}{149.6 \cdot 10^6 \text{ km}} \right) \cong 1.062 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Il tempo del transito quando Mercurio è all’afelio vale quindi:

$$\tau_{\text{af}} = \frac{\theta_{\text{af}}}{\omega_{\text{af_sin}}} = \frac{1.062 \cdot 10^{-2} \text{ rad}}{3.577 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} \cong 2.969 \cdot 10^4 \text{ s} \cong 0.343 \text{ giorni} \cong 8.22 \text{ h}$$

- 3) In modo del tutto analogo possiamo calcolare il tempo del transito quando Mercurio si trova al perielio. La velocità orbitale (v_{pe}) e la distanza dal Sole (b_{pe}) sono date da:

$$v_{pe} = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} \quad b_{af} = a(1-e)$$

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{GM_{Sole}(1+e)}{a^3(1-e)^3}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \cdot 1.2056}{1.942 \cdot 10^{32} \cdot 0.5013}} \cong 1.282 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

E quindi:

$$\omega_{pe_sin} = \omega_{pe} - \omega_T = 1.282 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 1.991 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cong 1.083 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Il valore dell'angolo θ sotteso da "l" visto dal centro del Sole quando Mercurio è al perielio è:

$$\theta_{pe} = 2 R_{Sole} \left(\frac{1}{a(1-e)} - \frac{1}{b} \right) = 2 \cdot 695500 \cdot \left(\frac{1}{46.00 \cdot 10^6} - \frac{1}{149.6 \cdot 10^6} \right) =$$

$$\cong 1.853 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Il tempo del transito quando Mercurio è al perielio vale quindi:

$$\tau_{af} = \frac{\theta_{af}}{\omega_{af_sin}} = \frac{1.853 \cdot 10^{-2} \text{ rad}}{1.083 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} \cong 1.711 \cdot 10^{-4} \text{ s} \cong 0.198 \text{ giorni} \cong 4.73 \text{ h}$$

Nota: questa soluzione è una semplificazione di un problema astronomico molto complesso (si veda anche il problema 5 della categoria Senior). La giuria ha tenuto conto nelle valutazioni anche di altri procedimenti proposti dagli studenti.