OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2019

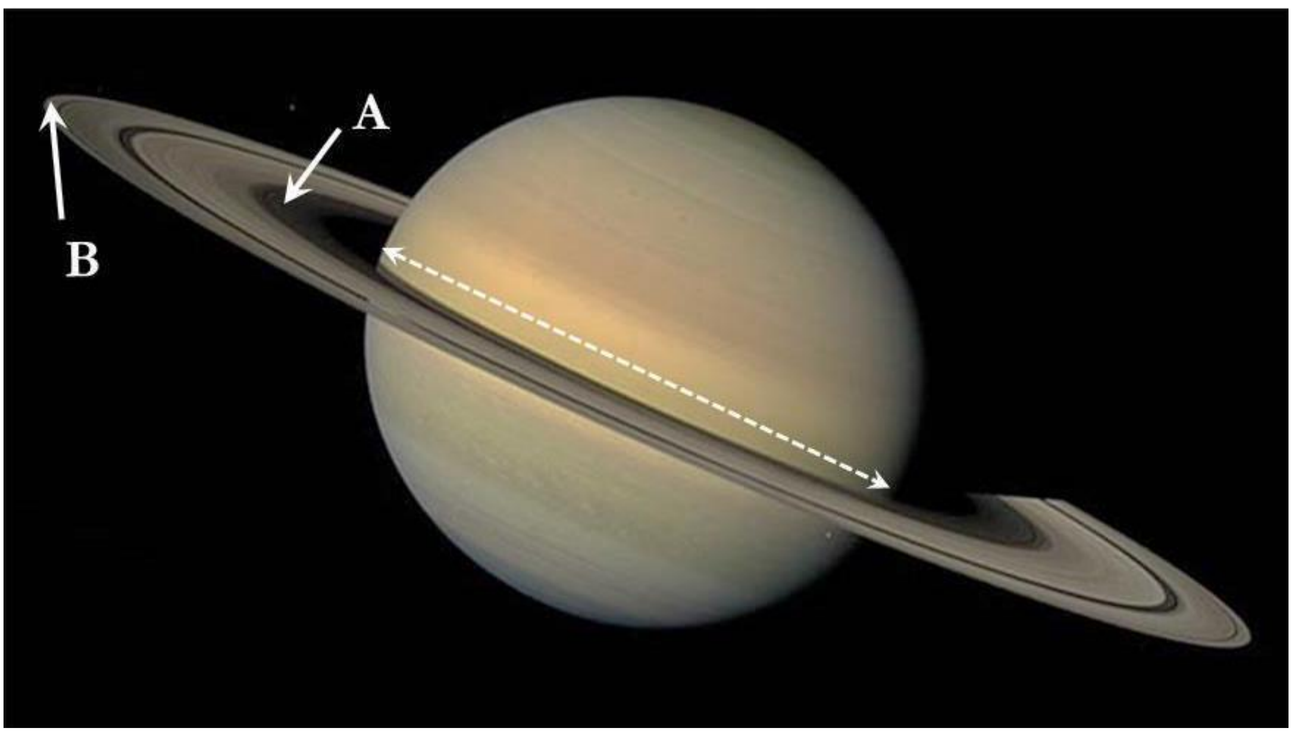
Finale Nazionale – 16 Aprile

Prova Pratica - Categoria Senior

Gli anelli di Saturno

Una perfida civiltà aliena ha rubato gli anelli di Saturno, che vediamo in figura 1 poco prima del furto, per privare il Sistema Solare di una delle sue più note attrazioni turistiche. Gli anelli di Saturno erano costituiti quasi interamente di ghiaccio di acqua, con uno spessore medio h = 10 m e una densità media $\rho_M = 0.04$ g/cm^3 (infatti, seppure a grande distanza apparissero come un corpo solido, in realtà gran parte del volume degli anelli era vuoto). Gli astronomi della Terra progettano di ripristinare gli anelli di Saturno, almeno nella parte compresa tra i punti A e B della figura 1, utilizzando l'acqua allo stato liquido che si trova all'interno di Encelado, uno dei satelliti di Saturno. Encelado ha un raggio di 252 km e immediatamente sotto la sua superficie, fino a una profondità di 140 km dove comincia un nucleo roccioso, possiede un oceano di acqua allo stato liquido, come mostrato in figura 2a, dove è rappresentata la sezione del pianeta. Calcolare se Encelado dispone di sufficiente acqua per ripristinare gli anelli di Saturno e, in caso positivo, disegnare in figura 2b il nuovo limite dell'oceano di Encelado dopo l'estrazione dell'acqua necessaria, ovvero calcolare la profondità a cui verrà a trovarsi il limite superiore dell'oceano. La linea bianca tratteggiata in figura 1 indica il diametro di Saturno riportato nella tabella dei dati.

Figura 1



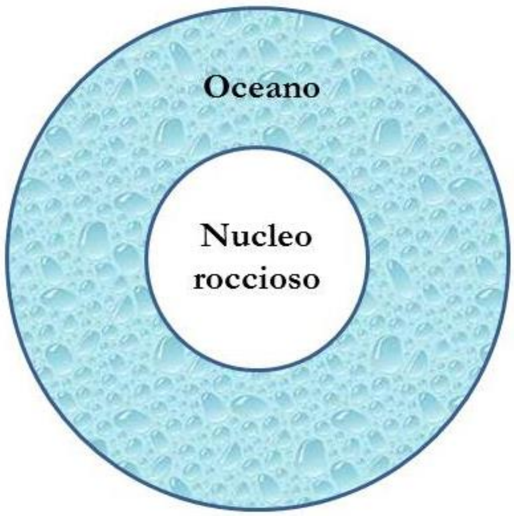


Figura 2a

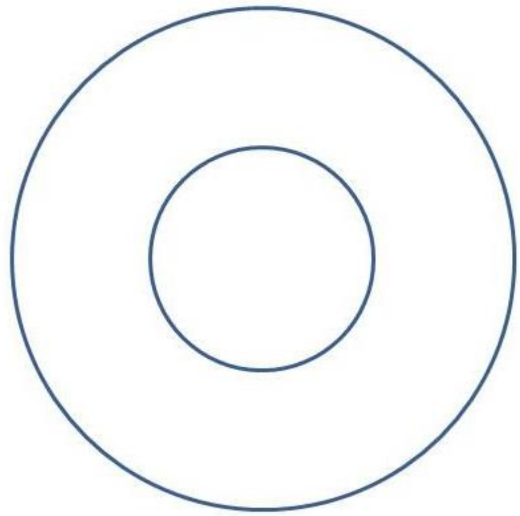


Figura 2b

Soluzione:

In figura 1 il diametro di Saturno (D = 120540 km) equivale a d ≅ 7.5 cm. Poiché la distanza dalla superficie di Saturno del punto A è r_A ≅1.4 cm e la distanza dalla superficie del punto B è r_B ≅ 4.8 cm, detti R_A e R_B il raggio interno ed esterno dell'anello da ricostruire e R_S il raggio di Saturno avremo:

$$R_A = R_S + \frac{r_A \cdot D}{d} \cong Rs + \frac{1.4 \cdot 120540}{7.5} \cong 82770 \text{ km}$$

$$R_B = R_S + \frac{r_A \cdot D}{d} \cong Rs + \frac{4.8 \cdot 120540}{7.5} \cong 137400 \text{ km}$$

Il volume dell'anello che si vuole ricostruire sarà quindi:

$$V_{anello} = \pi \left({R_B}^2 - {R_A}^2 \right) \cdot h \cong 378 \cdot 10^6 \text{ km}^3$$

Ed essendo: $\rho_M = 0.04 \frac{g}{cm}^3 = 4 \cdot 10^{10} \frac{kg}{km}^3$

la massa di acqua necessaria è:

$$M_{anello} = \rho_M \cdot V_{anello} \cong 1.5 \cdot 10^{19} \text{ kg}$$

Il raggio esterno di Encelado vale: R_E = 252 km, mentre il raggio del suo nucleo è: R_N = 112 km, quindi il volume occupato dall'oceano vale:

$$V_{oceano} = \frac{4}{3} \pi \left({R_E}^3 - {R_N}^3 \right) \cong 61 \cdot 10^6 \text{ km}^3$$

Assumendo per la densità dell'acqua il valore: $\rho_{acqua} = 1 \frac{g}{cm^3} = 10^{12} \frac{kg}{km^3}$

la massa dell'oceano sotto la superficie di Encelado è pari a:

$$M_{oceano} = \rho_{acqua} \cdot V_{oceano} \cong 6.1 \cdot 10^{19} \text{ kg}$$

Quindi l'acqua presente sotto la superficie di Encelado è ampiamente sufficiente per ripristinare gli anelli di Saturno tra i limiti A e B indicati in figura 1.

Una volta prelevata la quantità di acqua necessaria, nell'oceano di Encelado rimarrà una massa:

$$M_R = M_{oceano} - M_{anello} = 4.6 \cdot 10^{19}\ \mathrm{kg}$$

che occupa un volume:

$$V_F = \frac{M_R}{\rho_{acqua}} = \frac{4.6 \cdot 10^{19}\ \mathrm{kg}}{10^{12}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{km}^3}} = 46 \cdot 10^6\ \mathrm{km}^3$$

Detta R_F la distanza del nuovo limite dell'oceano di Encelado dal centro del satellite, avremo:

$$V_F = \frac{4}{3}\pi R_F^{\,3} - \frac{4}{3}\pi R_N^{\,3} \quad \text{da cui ricaviamo} \quad R_F = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V_F - R_N^{\,3}} \cong 212\ \mathrm{km}$$

Quindi dopo l'estrazione dell'acqua per ripristinare gli anelli di Saturno il limite superiore dell'oceano di Encelado si troverà a una profondità:

$$P = R_E - R_F \cong 40\ \mathrm{km}$$

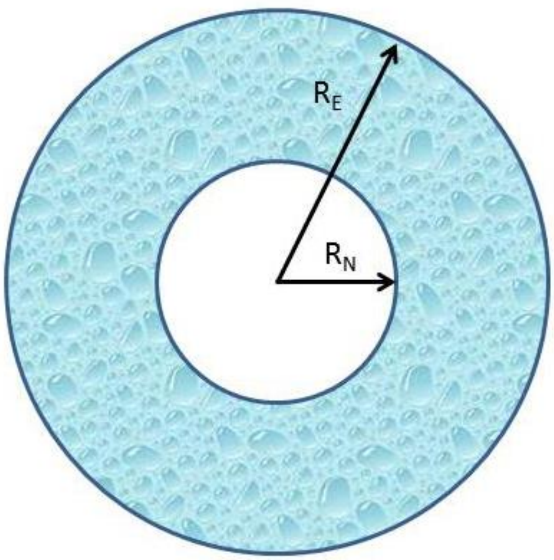


Figura 2a

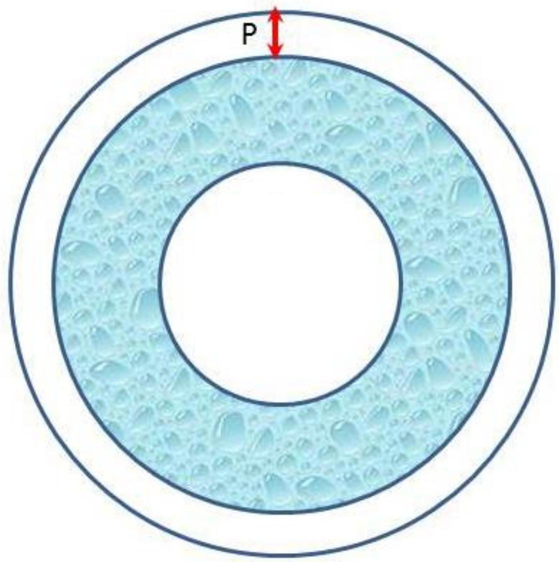


Figura 2b