OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2016

Gara Interregionale - 22 Febbraio

Categoria Senior

1. Il pianeta più "differente"

Quale degli otto pianeti del Sistema Solare ha la massima differenza tra la distanza al perielio e all'afelio ?

Soluzione. Detti ''a'' il semiasse maggiore ed ''e'' l'eccentricità dell'orbita, le distanze di un pianeta all'afelio (D_A) e al perielio (D_P) sono date dalle relazioni:

$D_A = a\,(1+e)$ e $D_P = a\,(1-e)$, da cui sottraendo membro a membro: $\boldsymbol{\Delta = D_A - D_P = 2 \cdot a \cdot e}$

Utilizzando i dati per i semiassi e le eccentricità riportati nella tabella fornita ai partecipanti calcoliamo: $\Delta_{Mercurio} = 23.81 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{Venere} = 1.472 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{Terra} = 4.997 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{Marte} = 42.57 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{Giove} = 75.35 \cdot 10^6$ km; $\Delta_{Saturno} = 154.7 \cdot 10^6$ km; $\boldsymbol{\Delta_{Urano} = 271.0 \cdot 10^6}$ **km**; $\Delta_{Nettuno} = 77.37 \cdot 10^6$ km. Quindi il pianeta con la maggior differenza tra la distanza al perielio e all'afelio è **Urano.**

2. Osservando Elliot ed E.T.

In una famosa scena del film "E.T. l'extraterrestre" si vede Elliot (il protagonista) transitare in bicicletta davanti alla Luna, con E.T. nel cestino della bicicletta. Immaginate di guardare verso sud stanotte e vedere, come nell'immagine a sinistra, Elliot che transita davanti alla Luna, con la Luna al meridiano.

a) Che ore sono ?

b) In estate Elliot dovrebbe spiccare un volo più in alto o più in basso rispetto a oggi, per farvi vedere la stessa scena ?

c) Sarebbe possibile riprendere la scena al solstizio d'inverno al Polo Sud? Perché?

Soluzione.

a) Nell'immagine la Luna è piena, quindi si trova in direzione opposta al Sole. Di conseguenza transita al meridiano in direzione sud a mezzanotte.

b) La Luna piena è opposta al Sole. In inverno a mezzanotte il Sole è più basso sotto l'orizzonte (la declinazione del Sole al solstizio d'inverno è: $\delta_\odot = - 23° 27'$) rispetto all'estate (la declinazione al solstizio d'estate è: $\delta_\odot = + 23° 27'$), quindi in inverno la Luna piena raggiunge a mezzanotte un'altezza maggiore. In estate la Luna piena transita al meridiano verso sud a un'altezza minore rispetto all'inverno: Elliot deve spiccare un salto più basso.

c) La scena NON è visibile al solstizio d'inverno al Polo Sud perché quel giorno il Sole è sempre sopra l'orizzonte, a un'altezza costante di 23.5°, e, di conseguenza, la Luna piena, che si trova dalla parte opposta dell'eclittica, è sempre sotto l'orizzonte (a un'altezza di $-23.5° \pm 5°$) e quindi non è visibile in cielo.

3. Una stella lontana

La luminosità apparente di una stella risulta $5.20 \cdot 10^{11}$ volte minore di quella del Sole, mentre la sua magnitudine assoluta è la stessa. Calcolare la magnitudine apparente della stella e la sua distanza dal Sole in m, pc e anni luce.

Soluzione 1. Dalla relazione $m_{\odot} - m_{stella} = 2.5 \log \frac{L_{\odot}}{L_{stella}}$ ricaviamo: $m_{\odot} - m_{stella} = 29.29$ e infine $\mathbf{m_{stella} = 2.55}$

Il Sole e la stella irradiano con la stessa potenza totale mentre le energie luminose sono inversamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dalla Terra:

$$\frac{E_{\odot}}{E_{stella}} = \frac{d^2_{stella}}{d^2_{\odot}}\ ; \qquad d_{stella} = \sqrt{\frac{E_{\odot}}{E_{stella}} \cdot d^2_{\odot}} = \sqrt{5.20 \cdot 10^{11} \cdot 2.24 \cdot 10^{22}} = \mathbf{1.08 \cdot 10^{17}\ m = 3.50\ pc = 11.4\ anni\ luce}$$

Soluzione 2. In alternativa per questa seconda parte del problema si può considerare la relazione: M = m + 5 – 5log d, che con M = 4.83 e m = 2.55 porta agli stessi risultati.

4. Intorno a un piccolo Sole

Supponete che la massa del Sole sia $M_{\odot} = 1.00 \cdot 10^{30}$ kg. Mantenendo inalterati il periodo di rotazione della Terra e il semiasse maggiore dell'orbita, da quanti giorni sarebbe formato un anno ? Quanto varrebbero, in km, un parsec e un anno luce ?

Soluzione. Dalla III Legge di Keplero ricaviamo: $T = \sqrt{\frac{4\pi^2\, a^3}{G\, M}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.348 \cdot 10^{33}}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.00 \cdot 10^{30}}}$ = $44.5 \cdot 10^6$ s = **515 giorni**

Quindi un anno durerebbe circa 515 giorni. Poiché il semiasse della Terra resterebbe invariato la lunghezza del parsec non cambierebbe e sarebbe sempre: **1 pc** = 206265 UA = **$30.86 \cdot 10^{12}$ km**. Cambierebbe invece la lunghezza di un anno luce, che sarebbe definito come: **1 a.l.** = 299792 km/s · 44.5 · 10^6 s = **$1.33 \cdot 10^{13}$ km** (ben diverso dal valore attuale di 0.946 · 10^{13} km). **Nota:** il valore dell'anno luce è definito utilizzando l'Anno Giuliano (=365.25 giorni), mentre nella soluzione si utilizza l'anno siderale, che fornisce comunque una buona approssimazione del valore cercato.

5. Le velocità al perielio e all'afelio

Ricavate dalla legge di conservazione dell'energia meccanica e dalla seconda legge di Keplero le relazioni che forniscono le velocità di un pianeta al perielio e all'afelio e calcolate le velocità orbitali della Terra quando si trova al perielio e all'afelio.

Soluzione. L'energia meccanica totale di un pianeta è data da: $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{d}$, dove ''m'' è la massa del pianeta, ''v'' la sua velocità di rivoluzione, ''d'' la sua distanza al Sole e ''M'' la massa del Sole. L'energia meccanica totale si conserva e, in particolare, il suo valore all'afelio è uguale al suo valore al perielio. Indichiamo con i pedici "a" e "p" i valori all'afelio e al perielio, rispettivamente:

$$\frac{1}{2}m{v_a}^2 - G\frac{Mm}{d_a} = \frac{1}{2}m{v_p}^2 - G\frac{Mm}{d_p};$$

ricordando che: $d_a = a(1+e)$ e $d_p = a(1-e)$ e semplificando ''m'' avremo infine:

$$\frac{1}{2}{v_a}^2 - \frac{GM}{a(1+e)} = \frac{1}{2}{v_p}^2 - \frac{GM}{a(1-e)}$$

Inoltre, dalla II Legge di Keplero sappiamo che vale la relazione: $v_a a\,(1+e) = v_p a\,(1-e)$

Con pochi semplici passaggi matematici si ricava, in definitiva:

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \qquad v_a = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$$

Si noti che queste espressioni sono valide per ciascun corpo orbitante intorno al Sole e, più in generale, intorno a un qualsiasi corpo di massa *M*, su un'orbita avente semiasse maggiore *a* ed eccentricità *e*.

Per la Terra si ricava:

$$\boldsymbol{v_p = 30.3\ km/s \qquad v_a = 29.3\ km/s}$$

Olimpiadi Italiane di Astronomia 2016

Gara Interregionale – 22 Febbraio 2016

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

Raggio medio	695475 km		Età stimata	$4.57 \cdot 10^9$ anni
Massa	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg		Classe spettrale	G2 V
Temperatura superficiale	5778 K		Posizione nel diagramma HR	Sequenza Principale
Magnitudine apparente dalla Terra	- 26.74		Distanza media dal centro galattico	$27 \cdot 10^3$ anni luce
Magnitudine assoluta	+ 4.83		Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico	$2.5 \cdot 10^8$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	Mercurio	Venere	Terra	Luna	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno
Raggio medio (km)	2440	6052	6378	1738	3397	71493	60267	25557	24766
Massa (kg)	$3.30 \cdot 10^{23}$	$4.87 \cdot 10^{24}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$7.35 \cdot 10^{22}$	$6.42 \cdot 10^{23}$	$1.90 \cdot 10^{27}$	$5.69 \cdot 10^{26}$	$8.68 \cdot 10^{25}$	$1.02 \cdot 10^{26}$
Semiasse maggiore dell'orbita (km)	$57.91 \cdot 10^6$	$108.2 \cdot 10^6$	$149.6 \cdot 10^6$	$384.4 \cdot 10^3$	$227.9 \cdot 10^6$	$778.4 \cdot 10^6$	$1.427 \cdot 10^9$	$2.871 \cdot 10^9$	$4.498 \cdot 10^9$
Periodo orbitale	87.969 ^{g}	224.70 ^{g}	365.26 ^{g}	27.322 ^{g}	686.97 ^{g}	11.863 ^{a}	29.447 ^{a}	84.017 ^{a}	164.79 ^{a}
Eccentricità dell'orbita	0.2056	0.0068	0.0167	0.0549	0.0934	0.0484	0.0542	0.0472	0.0086
Tipo	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie per figure geometriche notevoli

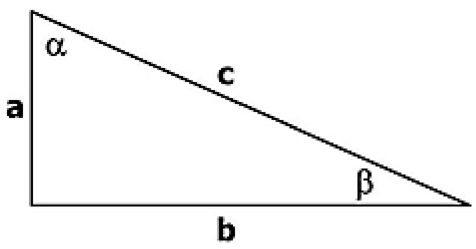
	Triangolo	Rettangolo	Quadrato	Cerchio	Ellisse	Sfera
Area	b h / 2	$L_1 L_2$	L^2	πR^2	π a b	$4 \pi R^2$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	Simbolo	Valore	Unità di misura
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \cdot 10^{-8}$	W m^{-2} K^{-4}
Velocità della luce nel vuoto	c	299792	km s^{-1}
Costante di Gravitazione Universale	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	m^3 kg^{-1} s^{-2}
Accelerazione di gravità al livello del mare	g	9.81	m s^{-2}

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli

Teorema di Pitagora	$c^2 = a^2 + b^2$
Funzioni trigonometriche	$a = c \text{ sen } \beta$ $\quad a = c \cos \alpha$ $\quad a = b \tan \beta$



Nota: I valori numerici presenti nelle tabelle sono tutti in notazione scientifica