Leggi di Keplero e Gravitazione

Giuseppe Cutispoto

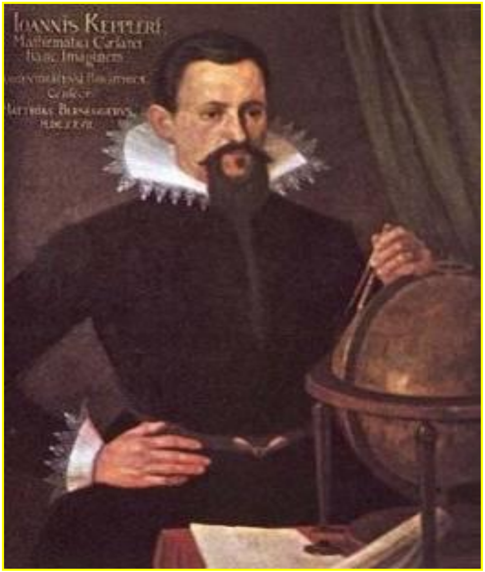
INAF – Osservatorio Astrofisico di Catania

giuseppe.cutispoto@inaf.it

Versione: 5 maggio 2020

In questa dispensa, distribuita gratuitamente, sono utilizzate informazioni e disegni prelevati da vari siti presenti sulla rete. Si ringraziano gli autori per aver messo a disposizione i materiali.

Giovanni Keplero (1571-1630)



Fu un convinto protestante, debole di costituzione e spesso malato soffriva di una forte miopia congenita. Visse all'epoca della "Guerra dei Trent'Anni" e la sua vita quotidiana fu molto difficile. Fu perseguitato per motivi religiosi e tra il 1617 e il 1620 dovette difendere la madre dall'accusa di stregoneria.

Aveva una numerosa famiglia, frutto di due matrimoni, ma riusciva con difficoltà a riscuotere lo stipendio. Morì mentre cercava di ottenere direttamente dall'Imperatore Ferdinando II i 10.000 fiorini (il suo stipendio annuo era di 1000 fiorini) che gli erano dovuti.

Keplero credeva nel sistema copernicano con un trasporto quasi religioso e rifiutò una chiamata all'Università di Bologna quando seppe da Galileo come era considerato in Italia tale sistema.

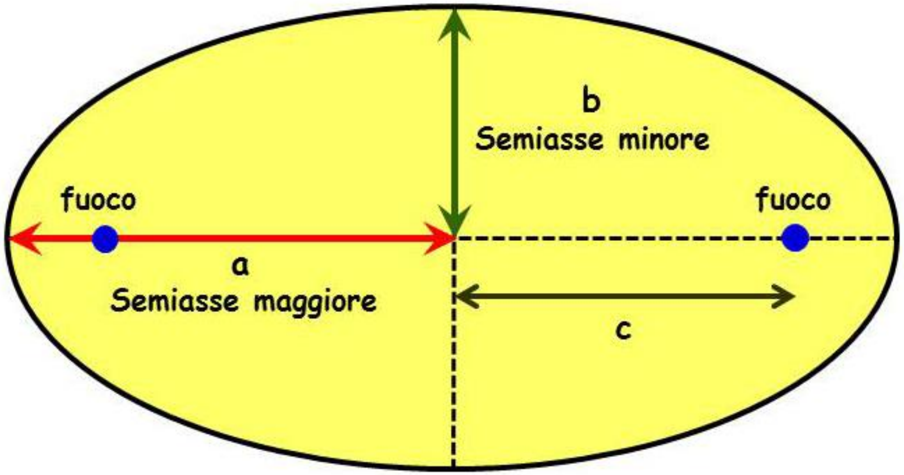
La sua grande (e unica) fortuna fu quella di essere nominato assistente del celebre Tycho Brahe a Praga nel 1600. Poco dopo Brahe morì improvvisamente e Keplero prese il suo posto, ereditando l'enorme mole di eccezionali dati osservativi ottenuti in anni di lavoro dal vecchio maestro..

Come Copernico e Galileo anche Keplero riteneva circolari le orbite dei pianeti; solo successivamente, per far coincidere i suoi calcoli con le osservazioni di Brahe, prese in considerazione anche altre figure geometriche. Keplero capì che la forma corretta delle orbite planetarie è l'ellisse, che descrisse come un "cerchio allungato"; inoltre, si rese conto che il Sole non sta al centro dell'ellisse, ma in uno dei due "fuochi".

Comprese che il moto di rivoluzione non avviene a velocità costante, ma che i pianeti si muovono più rapidamente quando sono più vicini al Sole. Sicuro dell'esistenza di un'armonia nell'Universo, Keplero cercò infine di trovare una regolarità tra i semiassi maggiori delle orbite e i periodi di rivoluzione .

Le prime due leggi furono pubblicate nel 1609 ("Astronomia nova"), la terza nel 1619 ("Harmonices Mundi"). La prima e la seconda legge superavano delle concezioni "arcaiche" dell'Astronomia, cioè le assunzioni che, poiché i moti celesti sono "perfetti", le orbite dei pianeti devono essere circolari e percorse con velocità uniforme.

Le Leggi di Keplero



Caratteristiche delle ellissi:

L'ellisse è una sezione conica e può essere definita come il luogo dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, rimane costante

a = semiasse maggiore;

b = semiasse minore;

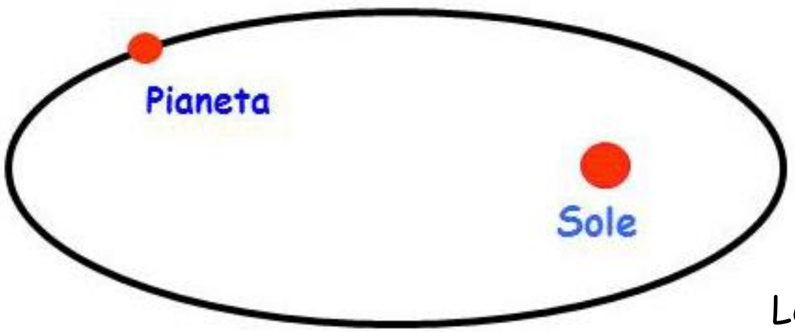
c = distanza dei fuochi dall'intersezione degli assi

Equazione di un ellisse con centro nell'origine degli assi cartesiani: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Coordinate dei fuochi: (-c,0), (c,0) con **c** = $\sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2}$;

e = eccentricità = $\sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{c}{a}$ $\boldsymbol{b} = a\sqrt{1 - e^2}$ $\boldsymbol{a} = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}}$ Area dell'ellisse = π **a b**

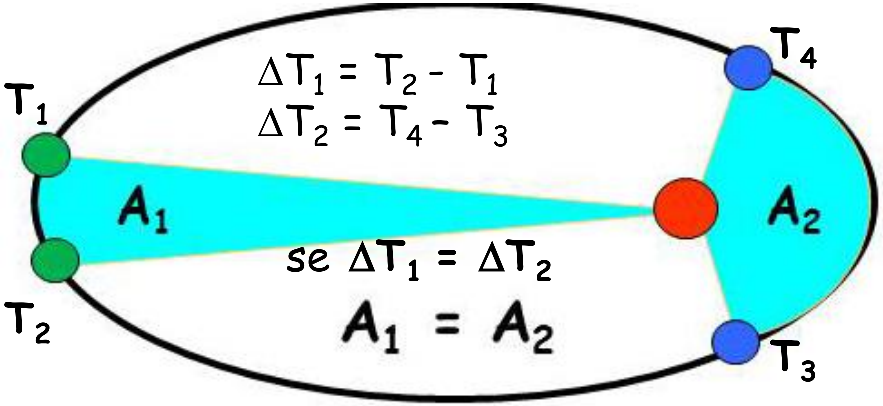
L = lunghezza dell'ellisse (approssimata per eccesso) $\cong \boldsymbol{\pi}\sqrt{\boldsymbol{2}\,(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2)} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{\pi}\sqrt{\boldsymbol{4} - \boldsymbol{2}\,\boldsymbol{e}^2}$



I Legge: le orbite dei pianeti sono delle ellissi, di cui il Sole occupa uno dei fuochi

Conseguenza: La distanza dei pianeti dal Sole non è costante

Le orbite dei pianeti sono simili a circonferenze (e_{Terra} = 0.0167); le eccentricità maggiori si osservano per asteroidi e comete



Nota: prima e seconda legge derivano dalle leggi di conservazione della **quantità di moto** e del **momento della quantità di moto**

II Legge: il raggio vettore che unisce un pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali (velocità areolare costante)

Conseguenza: La velocità di un pianeta lungo la sua orbita è maggiore al perielio e minore all'afelio

In generale, dette A_1 e A_2 due aree spazzate nei tempi ΔT_1 e ΔT_2 vale la relazione:

$$A_1 : \Delta T_1 = A_2 : \Delta T_2$$

$$\text{se } \Delta T_1 = \Delta T_2 \quad \text{segue} \quad A_1 = A_2$$

III Legge: il quadrato del periodo di rivoluzione (T) di un pianeta attorno al Sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita: $\frac{a^3}{T^2}$ **= K = costante**

Maggiore è la distanza dal Sole, maggiore è tempo necessario per completare una rivoluzione

Dati due corpi qualsiasi in orbita intorno al Sole vale la relazione: $\frac{a_1^{\,3}}{a_2^{\,3}} = \frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}}$

La III Legge fornisce un modello in scala del Sistema Solare, nota una qualsiasi distanza si possono ricavare le altre. Esprimendo il semiasse maggiore dell'orbita di un corpo in UA (Unità Astronomica = semiasse maggiore dell'orbita della Terra) e il suo periodo di rivoluzione in anni, vale la relazione: **a^3 (UA) = T^2 (anni)**

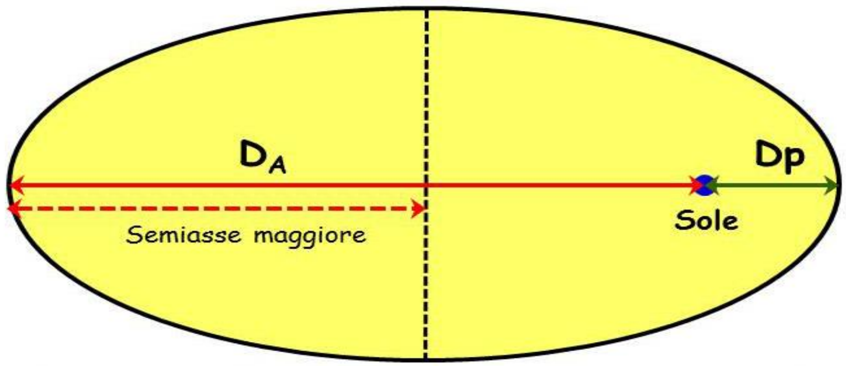
Per i pianeti in orbita intorno al Sole, il valore della "costante" è: $K = \frac{G \cdot (M_{Sole} + M_{pianeta})}{4\,\pi^2}$ (dove G è la Costante di Gravitazione Universale), ma poiché la massa del Sole è molto maggiore di qualsiasi corpo del Sistema Solare, vale l'approssimazione: $K \cong \frac{G \cdot M_{Sole}}{4\,\pi^2} \cong 3.36 \cdot 10^{18}\, m^3\, s^{-2}$

Se invece consideriamo il moto di un corpo di massa trascurabile attorno a un pianeta, vale l'approssimazione: $K = \frac{G \cdot M_{Pianeta}}{4\,\pi^2}$ e la III Legge di Keplero assume la forma: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_{Pianeta}}{4\,\pi^2}$

Infine, nel caso di corpi con massa (M e m) non molto diversa tra loro, la III Legge di Keplero va utilizzata nella cosiddetta forma generalizzata:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M+m)}{4\,\pi^2}$$

Orbite planetarie: definizioni e proprietà



D_A = Distanza all'Afelio   Dp = Distanza al Perielio

Afelio: distanza massima di un corpo del Sistema Solare dal Sole.

Perielio: distanza minima di un corpo del Sistema Solare dal Sole.

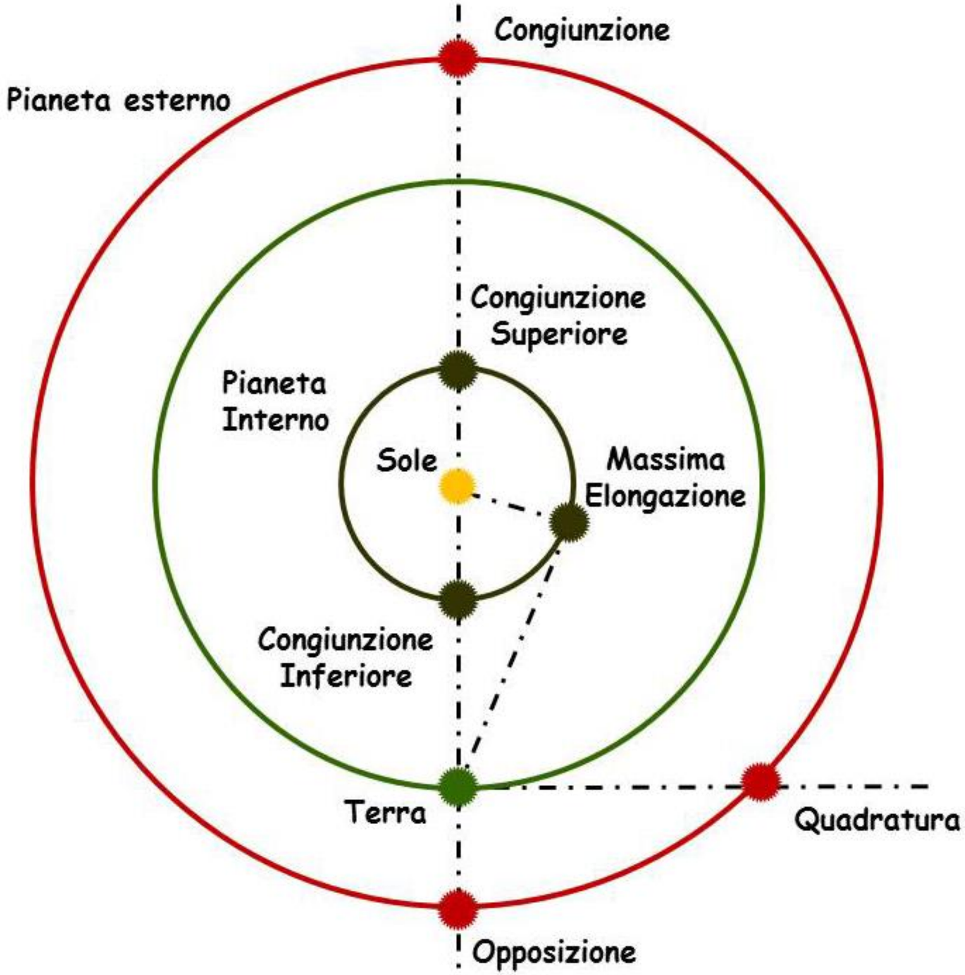
(per i corpi in orbita intorno alla Terra i termini corrispondenti sono Apogeo e Perigeo)

$$D_P = a\,(1-e) \qquad D_A = a\,(1+e) \qquad a = \frac{D_a + D_p}{2} \qquad c = \frac{D_a - D_p}{2} \qquad e = \frac{D_a - D_p}{D_a + D_p}$$

Indicando con V_A la velocità di un corpo all'Afelio e con V_P la sua velocità al Perielio, dalla seconda legge di Keplero ricaviamo la relazione: $V_A\, D_A = V_P\, D_P$

Nota: dalla legge di conservazione del momento della quantità di moto, sappiamo che il prodotto vettoriale: **V** × **D** = V · D · sin α = **costante**; dove V e D sono i moduli dei vettori **V** e **D** e α è l'angolo formato dai due vettori. In generale vale quindi la relazione: $V_1 \cdot D_1 \cdot \sin\alpha_1 = V_2 \cdot D_2 \cdot \sin\alpha_2$; ma poiché sia al perielio che all'afelio il vettore velocità è tangente all'orbita si ha: α = 90° e quindi $V_A\, D_A = V_P\, D_P$

Configurazioni planetarie



Pianeti esterni

- **Opposizione:** il pianeta è in direzione opposta al Sole
- **Congiunzione:** il pianeta è nella stessa direzione del Sole
- **Quadratura:** l'angolo Sole-Terra-Pianeta è di 90°
- **Grande Opposizione:** si ha quando il pianeta è in opposizione e nello stesso istante la Terra si trova all'afelio e il pianeta al perielio

Pianeti interni

- **Congiunzione inferiore:** il pianeta è nella stessa direzione del Sole nel punto più vicino alla Terra
- **Congiunzione superiore:** il pianeta è nella stessa direzione del Sole nel punto più lontano dalla Terra
- **Massima elongazione:** è il valore massimo dell'angolo Sole-Terra-Pianeta (ovvero la massima distanza angolare Sole-Pianeta visti dalla Terra), si ha quando la congiungente Terra-Pianeta risulta tangente all'orbita del pianeta; è sempre minore di 90°

Nota 1: Un pianeta interno sarà osservato alla massima elongazione est dopo il tramonto e apparirà esattamente in fase di "primo quarto". Un pianeta interno sarà osservato alla massima elongazione ovest prima dell'alba e apparirà esattamente in fase di "ultimo quarto".
Nota 2: Quando la Luna si trova in quadratura la sua fase sarà prossima, ma **NON** esattamente uguale, a quella di "primo quarto" (sarà in effetti leggermente oltre) o 'di "ultimo quarto" (sarà in effetti leggermente prima).

Leggi della meccanica

1) **Legge d'inerzia**: un corpo non soggetto a forze o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme; quindi detta "**F**" la forza e "**a**" l'accelerazione, se **F** = 0 segue **a** = 0

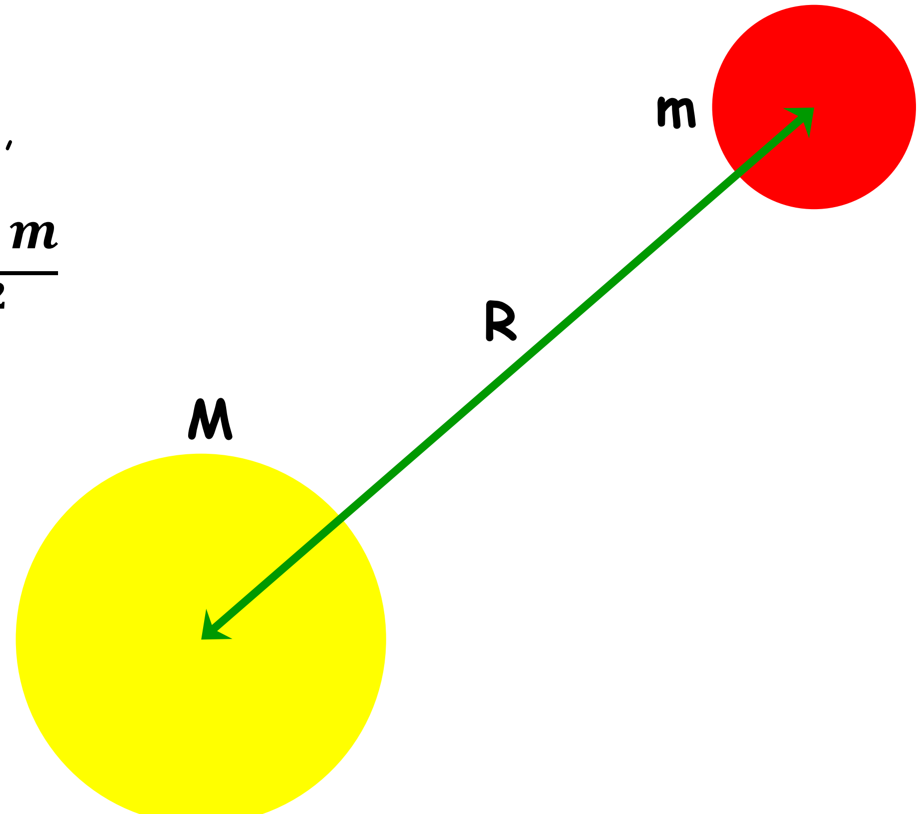
2) **F = m · a** se a un corpo è applicata una **forza** (F) esso subirà un'**accelerazione** (a) proporzionale alla forza applicata. La costante di proporzionalità è la **massa** (m) del corpo

3) **Principio di azione e reazione:** a ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria

Legge di Gravitazione Universale

Dati due corpi di massa "**M**" e "**m**" posti a distanza "**R**", tra di loro si esercita una forza pari a:

$$F = G\,\frac{M \cdot m}{R^2}$$



La legge di gravitazione universale vale qualunque sia la natura dei corpi che si considerano; inoltre la forza di gravità è "istantanea".

Attenzione: la distanza (R) da considerare è quella tra i baricentri dei due corpi e non quella tra le loro superfici.

Altre relazioni

Moto rettilineo uniforme: v (velocità lineare) = $\frac{s}{t}$ $[m \cdot s^{-1}]$ (s = spazio, t = tempo)

Moto rettilineo uniformemente accelerato:

$v = v_0 + a \cdot t$ $[m \cdot s^{-1}]$ (v_0 = velocità iniziale; a = accelerazione $[m \cdot s^{-2}]$)

$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ $[m]$ $v = \sqrt{v_0{}^2 + 2\,a\,s}$ $[m \cdot s^{-1}]$

Moto circolare uniforme

ω (velocità angolare) = $\frac{2\,\pi}{T}$ [$\frac{radianti}{s} = s^{-1}$ (il radiante è un numero puro)] (T = periodo del moto [s])

v_T (velocità tangenziale) = $\omega \cdot r = \frac{2\,\pi\,r}{T}$ $[m \cdot s^{-1}]$ (r = raggio della circonferenza)

a_c (accelerazione centrifuga) = $\omega^2 \cdot r = \frac{v_T{}^2}{r}$ $[m \cdot s^{-2}]$

Accelerazione di gravità

è l'accelerazione a cui è soggetto un corpo di massa "m" a causa della forza di gravitazione esercitata su di esso da un corpo di massa "M". Dalla la relazione $F = G\,\frac{M \cdot m}{R^2} = \mathbf{m} \cdot a$ si ha:

$a_g = G\,\frac{M}{R^2}$ (per ogni corpo a distanza R dal centro di un corpo di massa M)

L'energia meccanica totale di un pianeta (energia cinetica + energia potenziale gravitazionale) è data da: $E = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{Mm}{R}$, dove "m" è la massa del pianeta, "v" la sua velocità di rivoluzione, "R" la sua distanza al Sole e "M" la massa del Sole. **L'energia meccanica totale si conserva**. Si ha inoltre E<0 per orbite ellittiche, E=0 per orbite paraboliche, E>0 per orbite iperboliche

Prima Velocità Cosmica e Velocità di fuga

Si definisce **prima velocità cosmica** ($\mathbf{v_1}$) la velocità che un corpo (di massa trascurabile) deve possedere per entrare in orbita circolare, a una distanza "r" dal centro, attorno a un corpo di massa "M". Ciò accade quando la forza centrifuga è bilanciata dall'attrazione gravitazionale:

$$\mathbf{v_1} = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$$

Si definisce **velocità di fuga** ($\mathbf{v_f}$), o seconda velocità cosmica, la velocità minima iniziale a cui un corpo (di massa trascurabile) **senza ulteriore propulsione** (per esempio un proiettile) deve muoversi per potersi allontanare indefinitamente, partendo dalla superfice di un corpo di massa "M" e raggio "R". Dal principio di conservazione dell'energia meccanica si ottiene:

$$\mathbf{v_f} = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \mathbf{v_{1R}}\sqrt{2}$$

Nel caso della Terra $\mathbf{v_{1R}}$ = 7.90 km/s e $\mathbf{v_{fT}}$ = 11.17 km/s

Nota: Per allontanarsi dalla Terra una navicella spaziale non ha bisogno di raggiungere la velocità di fuga, può allontanarsi anche a velocità molto minori se è dotata di un sistema di propulsione.

Un corpo può entrare in orbita a una distanza "r" dalla Terra solo se la sua velocità (v) è compresa nell'intervallo: $\mathbf{v_{1r} \le v \le v_{fT}}$. Se $\mathbf{v < v_{1r}}$ il corpo cadrà sulla Terra con moto parabolico; se $\mathbf{v = v_{1r}}$ entrerà in orbita circolare; se $\mathbf{v_{1r} \le v \le v_{fT}}$ descriverà un'orbita ellittica.

Attenzione: all'interno di una navicella in orbita circolare intorno alla Terra (per esempio la Stazione Spaziale Internazionale) l'accelerazione di gravità è quasi nulla (condizione di microgravità) non perché l'accelerazione di gravità della Terra è nulla, ma perché la forza centrifuga bilancia l'attrazione gravitazionale.

Moto con accelerazione variabile

La relazione **v = a t** si può applicare solo nei casi in cui l'accelerazione non varia in modo significativo lungo il percorso del corpo in moto, per esempio nella caduta libera di un grave da un'altezza molto minore del raggio di un pianeta.

Nel caso di caduta di un corpo di piccola massa da una distanza molto grande, tale cioè da non poter considerare costante l'accelerazione di gravità, una soluzione approssimata per il tempo di caduta (t) può essere ricavata dalla terza legge di Keplero, considerando la traiettoria come un'ellisse estremamente schiacciata (e ≈ 1) con il corpo di massa maggiore in uno dei fuochi.

Detta "d" la distanza di partenza del corpo, "a" il semiasse maggiore dell'ellisse e "T" il periodo di rivoluzione, se le dimensioni del corpo di massa "M" sono piccole rispetto a "d", si avrà:

$$a = \frac{d}{2}; \quad t = \frac{T}{2}$$

Ricavando T dalla terza legge di Keplero avremo:

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 a^3}{G\,M}} \qquad \text{e sostituendo} \qquad \mathbf{t} = \sqrt{\frac{\pi^2 d^3}{8\,G\,M}}$$

Se invece è noto il tempo di caduta si può ricavare la distanza di partenza:

$$\mathbf{d} = \sqrt[3]{\frac{8\,t^2 G\,M}{\pi^2}}$$

Velocità lungo l'orbita

Per un corpo di massa **m** in orbita ellittica attorno un corpo di massa **M**, con **M >> m**, la velocità in un qualsiasi punto dell'orbita a distanza **r** dal corpo di massa **M** è data dalla relazione:

$$v = \sqrt{G\, M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Per i corpi del Sistema Solare: $\boldsymbol{v = \sqrt{G\, M_{Sole} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}}$

nel caso di orbita circolare : $\boldsymbol{v} = costante = \boldsymbol{v_m} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{G\, M_{Sole}}}{\boldsymbol{a}}}$

Per un'orbita con eccentricità **e**, le velocità all'afelio e perielio valgono rispettivamente:

$$\boldsymbol{v_a = v_m \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} \qquad \boldsymbol{v_p = v_m \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}$$

Dove $\mathbf{v_m}$ non è la velocità media del corpo lungo l'orbita, ma la media di tutte le sue velocità. Si possono inoltre ricavare le relazioni:

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{1-e}{1+e} \qquad e = \frac{1-\frac{v_a}{v_p}}{1+\frac{v_a}{v_p}} \qquad v_a \cdot v_p = \frac{G\, M}{a} \qquad a = \frac{T}{2\,\pi}\sqrt{v_a \cdot v_p} \qquad T = \frac{2\,\pi\, a}{\sqrt{v_a \cdot v_p}}$$

Nel caso di orbita parabolica, poichè l'energia meccanica totale è sempre nulla, si ha: $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$

Da cui si ricava la velocità in ogni punto di un'orbita parabolica:

$$\boldsymbol{v_{par} = \sqrt{\frac{2\, G\, M}{R}}}$$

Un corpo in orbita parabolica ha in ogni istante, ovvero a ogni distanza, una velocità pari alla velocità di fuga, che risulta maggiore di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto alla velocità che avrebbe a quella distanza su un'orbita circolare

Periodo Siderale e Periodo Sinodico

Il **Periodo Siderale** è il tempo che impiega un corpo per completare un'orbita, ovvero il tempo che impiega per ritornare nello stesso punto rispetto alle stelle fisse. La Terra completa un'orbita intorno al Sole in 365,25636 giorni (anno siderale); la Luna completa un'orbita intorno alla Terra in 27.32166 giorni (mese siderale). Normalmente per "Periodo di Rivoluzione" si intende il periodo siderale.

Il **Periodo Sinodico** è il tempo che impiega un corpo per tornare nella stessa posizione rispetto al Sole. Per esempio è il tempo tra due opposizioni successive di un pianeta o la durata di un ciclo completo di fasi di un satellite. La sua durata dipende dal punto di osservazione; per un dato pianeta è diverso se misurato da pianeti diversi. Il periodo sinodico differisce da quello siderale perché il corpo da cui si osserva ruota anch'esso intorno al Sole.

Per un osservatore sulla Terra e per un pianeta (in generale per un qualsiasi corpo) che ruota intorno al Sole nella stessa direzione della Terra, la relazione che lega il Periodo Sinodico (S) del pianeta con il suo Periodo Siderale (P) e con il Periodo Siderale della Terra (E) è:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P} \quad \text{se } P > E; \qquad \frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E} \quad \text{se } P < E$$

Consideriamo il valore assoluto della differenza E – P, ovvero (|E –P|)

Se è noto P le due relazioni possono essere scritte come: $S = \frac{E \cdot P}{|E-P|}$

Se è noto S le due relazioni possono essere scritte come: $P = \frac{E \cdot S}{|E-S|}$

Nel caso in cui il corpo ruota attorno al Sole in direzione opposta a quella della Terra, valgono le relazioni:

$$S = \frac{E \cdot P}{|E+P|} \qquad P = \frac{E \cdot S}{|E+S|}$$

Limite di Roche

Consideriamo un corpo di massa **m**, raggio $\mathbf{r_m}$ e densità ρ_m tenuto insieme dalla propria forza di gravità e un corpo di massa **M**, raggio $\mathbf{R_M}$ e densità ρ_M con M >> m. Il **Limite di Roche** (o Raggio di Roche dal nome dell'astronomo che lo calcolò per primo nel 1848) è la distanza **d** dal centro del corpo di massa **M** all'interno della quale il corpo di massa **m** viene disintegrato a causa delle forze mareali esercitate su di esso dal corpo di massa **M**. Per un corpo rigido valgono le relazioni:

$$d \approx R_M \sqrt[3]{\frac{3\,\rho_M}{\rho_m}} \approx r_m \sqrt[3]{\frac{3\,M}{m}} \approx \sqrt[3]{\frac{9\,M}{4\pi\,\rho_m}}$$

Nel caso di corpi fluidi o non molto compatti, quindi di bassa densità quali comete e alcuni asteroidi, il limite aumenta e si possono applicare le relazioni:

$$d \approx 2.44\,R_M \sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}} \approx 2.44\,r_m \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \approx 1.51 \sqrt[3]{\frac{M}{\rho_m}}$$

Del materiale in orbita intorno a un pianeta all'interno del limite di Roche non può concentrarsi in un satellite e formerà degli anelli.

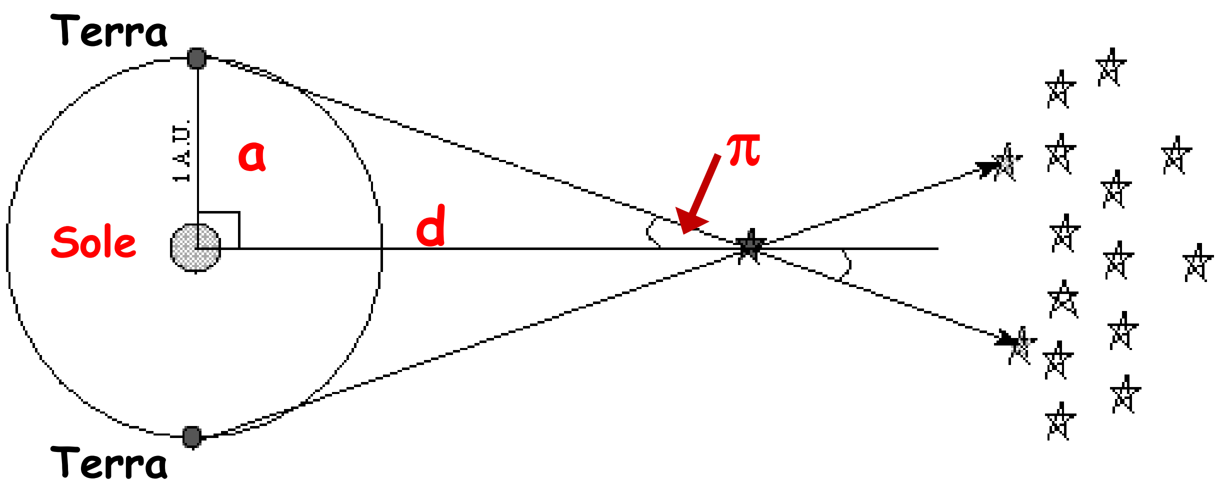
Raggio di Hill

Consideriamo un corpo di massa **m** in orbita circolare (o con bassa eccentricità) a una distanza **a** attorno a un corpo di massa **M** con M >> m. Il **Raggio della sfera di Hill** (dal nome dell'astronomo americano che lo derivò) del corpo di massa **m** è la massima distanza $\mathbf{r_H}$ entro la quale il corpo può trattenere un satellite (ovvero un terzo corpo di massa **k << m)** vincendo la gravità del corpo di massa M. Vale la relazione:

$$r_H \approx a \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}$$

Parallasse Annua, Parsec e Anno Luce

Si definisce **Parallasse Annua** (π) di una stella la metà del suo spostamento apparente (rispetto a stelle molto più lontane) causato dal moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole. Poiché l'UA è molto piccola rispetto alla distanza delle stelle, anche l'angolo π è molto piccolo e risulta **sempre minore di 1″** (1″ = 1°/3600)



Solo nel 1838 F.W. Bessel fu in grado di misurare la prima parallasse stellare: 61 Cygni mostra una parallasse di 0″.293, un angolo che equivale alle dimensioni apparenti di una moneta da 1€ vista da una distanza di 16 km

Le osservazioni da Terra permettono misure di parallasse fino ~ 100 pc. Il satellite Hipparcos ha esteso le misure di distanza fino a circa 1000 pc. Il satellite GAIA, lanciato il 19/12/2013, permetterà misure estremamente accurate fino a circa 10000 pc

Si definisce **Parsec (pc)** la distanza dalla quale 1 UA sottende un angolo di 1″ (1 arcsec)

Poiché $a = d \tan \pi$ ricaviamo che 1 parsec = 206265 UA $\simeq 30857 \cdot 10^9$ km

La distanza di una stella in pc è pari all'inverso della sua parallasse annua in secondi d'arco (per esempio se π = 0″.04, segue **d** = 25 pc)

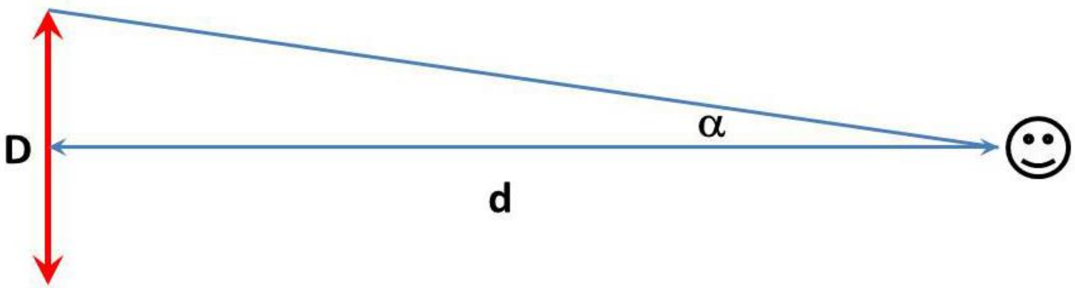
Un **Anno Luce (al)** è la distanza che la luce percorre nel vuoto in un anno giuliano (= 365.25 g)

1 anno luce = $(365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 299792) \simeq 9460.7 \cdot 10^9$ km $\simeq$ 63240 UA $\simeq$ 0.3066 parsec

1 pc $\simeq$ 3.2616 anni luce

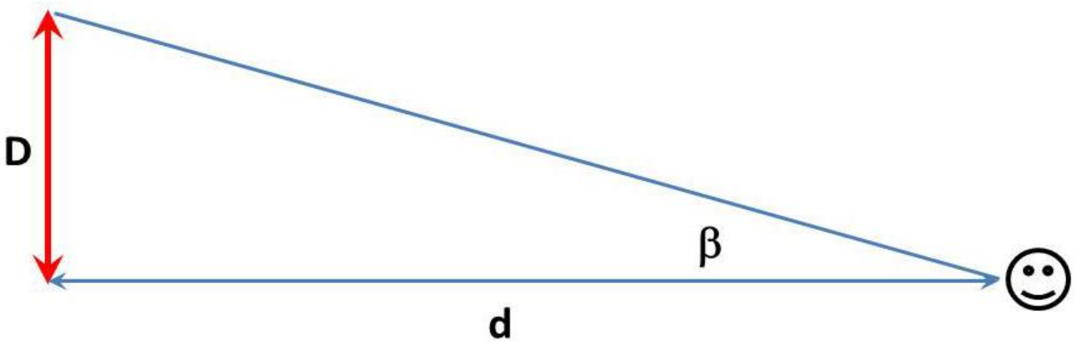
Dimensioni angolari di una sorgente estesa

Consideriamo una sorgente estesa di diametro "D", osservata da una distanza "d" con **D << d**
Detta β la dimensione angolare della sorgente estesa valgono le relazioni:



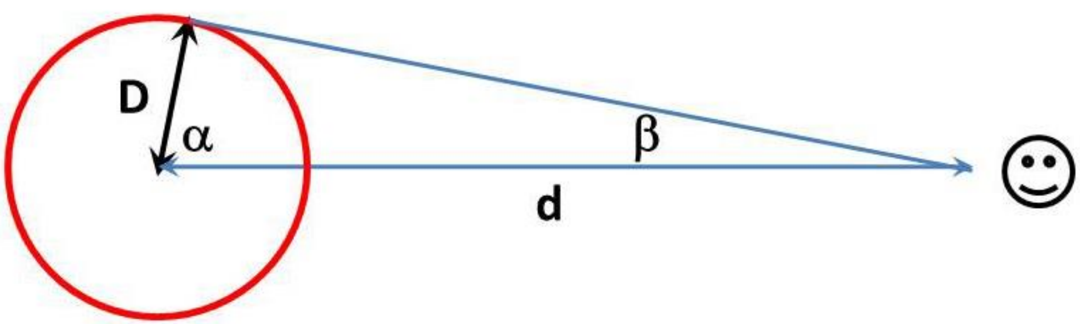
$$\frac{D}{2} = d \cdot \tan\alpha$$

$$\beta = 2\,\alpha$$



Nella quasi totalità dei casi astronomici si può utilizzare l'approssimazione:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{d} \cdot \tan\boldsymbol{\beta}$$



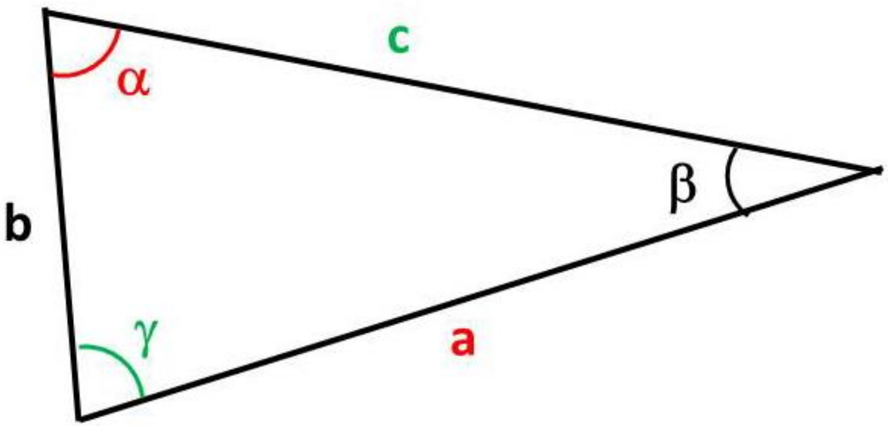
Se "D" non è trascurabile rispetto a "d" valgono invece le relazioni:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{d} \cdot \cos\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{d} \cdot \sin\boldsymbol{\beta}$$

Triangoli: relazioni tra lati e angoli

Teorema dei seni. In un triangolo qualsiasi il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è costante:



$$\frac{c}{sen\,\gamma} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{a}{sen\,\alpha}$$

Teorema del coseno (o di Carnot). Iin un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è dato dalla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio prodotto degli altri due lati per il coseno dell'angolo tra essi compresi (ovvero l'angolo opposto al lato che si sta calcolando):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$

Il teorema del coseno è una generalizzazione del teorema di Pitagora applicabile a un triangolo qualsiasi. Nella precedente relazione se γ = 90° otteniamo: $c^2 = a^2 + b^2$

Teorema delle proiezioni. In un triangolo qualsiasi un lato è dato dalla somma degli altri due lati per il coseno dell'angolo che essi formano con il primo:

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta$$