OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2015
FINALE NAZIONALE – 19 Aprile
Prova Teorica - Categoria Junior

1. Vero o falso ?

Quale delle seguenti affermazioni può essere vera ? Giustificate in dettaglio la vostra risposta.

1) La Terra è alla minima distanza dal Sole all'inizio del mese di Luglio.
2) L'eclisse di Sole fu osservata a livello del mare alla mezzanotte locale.
3) Se Giove è in opposizione nel mese di Giugno, da Modena (latitudine λ = 44° 39') è possibile osservarlo in prossimità dello Zenith.

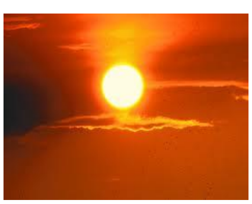
Soluzione

La Terra si trova al perielio all'inizio del mese di gennaio. Dunque la prima affermazione è falsa.

Consideriamo ora un corpo in opposizione: esso, per definizione, si trova in direzione opposta al Sole rispetto alla Terra. Nel mese di Giugno, il Sole ha la massima declinazione positiva ($\delta_{\odot}$ = +23° 26') e quindi Giove, come tutti i pianeti sempre molto prossimo al piano dell'eclittica, avrebbe la massima declinazione negativa ($\delta_{Giove} \cong$ –23° 26'). Ne segue che da Modena non potrà essere osservato in prossimità dello Zenith, in quanto la sua altezza massima sarebbe data da: $h_{max} \cong 90° - \lambda - 23° \, 26' \cong 21° \, 55'$. Quindi anche la seconda affermazione è falsa.

L'unica delle tre affermazioni che può essere vera è la seconda. Infatti se ci troviamo oltre uno dei circoli polari è possibile osservare un'eclisse di Sole anche a mezzanotte, in quanto il Sole, durante l'estate locale, può restare sopra l'orizzonte per tutte le 24 ore.

Nota: la prima affermazione è falsa nell'epoca attuale, tuttavia in un futuro lontano, a causa dei moti di precessione, diventerà vera. Nella valutazione si è tenuto conto di questa possibilità per i partecipanti che hanno correttamente motivato la risposta.



2. Gravità

Calcolare il rapporto tra la gravità superficiale del Sole e quella della Terra.

Soluzione

Possiamo scrivere per un corpo posto sulla fotosfera del Sole e sulla superfice della Terra, rispettivamente:

$$g_{\odot} = G \, M_{\odot} / R_{\odot}^2 \qquad\qquad g_T = G \, M_T / R_T^2$$

Prendendo il rapporto di ambo i membri, otteniamo quindi:

$$g_{\odot} / g_T = (M_{\odot}/M_T)(R_T/R_{\odot})^2 = (1.99 \cdot 10^{33}/5.97 \cdot 10^{27})(6378 \cdot 10^3/695475 \cdot 10^3)^2 =$$

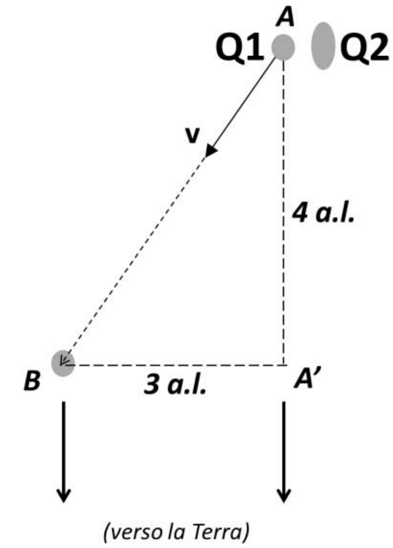
$$= 3.33 \cdot 10^5 \cdot (9.17 \cdot 10^{-3})^2 = 28 \qquad \text{In definitiva:} \quad g_{\odot} = 28 \, g_T$$

3. Un quasar sconvolgente

È stato osservato un quasar doppio che si trova a grandissima distanza dalla Terra. La particolarità di questo quasar è il moto di allontanamento delle due componenti Q1 e Q2. In particolare, Q1 si allontana da Q2 spostandosi, come riportato in figura, dal punto A al punto B, con velocità relativista "v" pari al 75% della velocità della luce.

Calcolare l'intervallo di tempo Δt impiegato dal componente Q1 a raggiungere il punto B e il corrispondente intervallo di tempo Δt' misurato dagli astronomi sulla Terra (che giace sullo stesso piano della figura).

Sulla base del risultato ottenuto, di fronte a quale sconvolgente conclusione si sono trovati gli astronomi, prima di riuscire a spiegare correttamente il fenomeno ?



Soluzione

La figura mostra che il tratto AB può essere decomposto in un tratto AA', parallelo alla linea di vista, e lungo 4 anni luce, e un tratto A'B, a esso perpendicolare, lungo 3 anni luce.

Per il teorema di Pitagora il tratto AB è dunque lungo 5 anni luce e il componente Q1 ha percorso tale distanza in un tempo

$$\Delta t = \frac{AB}{v} = \frac{5\ anniluce}{0.75\ c} = \frac{5}{0.75}\ anni\ = 6.67\ anni$$

avendo indicato con c la velocità della luce (si noti che non è necessario, ai fini di questo problema, conoscere il suo valore).

Gli astronomi sulla Terra, tuttavia, hanno osservato qualcosa di diverso.

Quando Q1 è nel punto A, parte un segnale luminoso diretto verso la Terra che inizia a percorrere il tratto AA', lungo 4 anni luce, con velocità c, impiegando quindi un tempo pari a 4 anni.

Quando Q1 raggiunge il punto B, il segnale luminoso che parte da esso non dovrà percorrere i 4 anni luce "extra" percorsi dal primo segnale.

Ne consegue che i due segnali luminosi sono separati da un intervallo minore di Δt, e precisamente

$$\Delta t' = \Delta t - 4 \text{ anni} = 2.67 \text{ anni}$$

Dopo soli 2.67 anni, gli astronomi sulla Terra hanno visto il componente Q1 del quasar spostato dal punto A al punto B.

Dal momento però che il tratto AA' è parallelo al linea di vista, gli astronomi di fatto hanno visto il componente Q1 aver percorso il tratto A'B, di 3 anni luce, in un tempo di soli 2.67 anni.

Lo sconvolgente risultato di fronte al quale si sono trovati gli astronomi è che **apparentemente** il componente Q1 si è spostato ad una velocità v_1 pari a

$$v_1 = \frac{A'B}{\Delta t'} = \frac{3\ anniluce}{2.67\ anni} = \frac{3}{2.67}\ c\ = 1.125\ c$$

ovvero ad una velocità superiore a quella della luce !

4. La distanza di Procione

Calcolare la distanza di Procione (α CMi) in pc e in anni luce, conoscendo la sua parallasse π=0.286". Considerando che Procione ha una magnitudine apparente m = 0.34, dire se, nel caso in cui la sua distanza fosse 10 volte maggiore, la stella risulterebbe ancora osservabile a occhio nudo.

Soluzione

La distanza di Procione è:

$$d = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0.286} = 3.5\ pc$$

ed essendo 1 Parsec = 3.26 anni luce, si ha: d = 11.4 anni luce .

Se la distanza di procione aumentasse di un fattore 10, il flusso diminuirebbe di un fattore 100 (poiché il flusso diminuisce con l'inverso del quadrato) e quindi la magnitudine aumenterebbe di cinque unità:

$$m = 0.34 + 2.5 \log 100 = 5.34$$

La stella, teoricamente, sarebbe ancora visibile ad occhio nudo.

5. Deep Impact

Nel film *Deep Impact* (1998), una cometa spaccata in due sta per schiantarsi sulla Terra. Si consideri la situazione analoga di una coppia di bolidi, di masse M_1 ed M_2 trascurabili rispetto alla massa della Terra. Essi vengono osservati per la prima volta quando, sulla stessa orbita percorsa dalla Terra intorno al Sole, si trovano ad una distanza $D = 10^6$ km dalla Terra, distanti l'uno dall'altro $r = 10^3$ km e prossimi a impattare la Terra in virtù dell'attrazione gravitazione di quest'ultima. Si calcoli:

1) quanto tempo, dopo questa prima osservazione, il primo bolide impatta sulla Terra (si trascuri il raggio terrestre);
2) quanto tempo, dopo il primo impatto, avviene il secondo impatto.
3) se gli impatti avvengono all'equatore, a quale distanza d, sulla superficie terrestre, si verificano?

Soluzione

Per i due bolidi non si può applicare la legge della caduta libera, in quanto l'attrazione gravitazione varia sensibilmente durante il loro avvicinamento alla Terra. È allora necessario pensare ai due bolidi come orbitanti intorno alla Terra su orbite di eccentricità prossima a 1, in cui ciascun bolide si trova inizialmente all'apogeo e la Terra in uno dei fuochi il quale, essendo l'eccentricità molto prossima a 1, coincide praticamente con il perigeo. In virtù della III Legge di Keplero, il tempo di impatto sarà semplicemente pari al semiperiodo di rivoluzione, con il semiasse maggiore rappresentato dalla semi-distanza iniziale bolide-Terra. Detta M la massa della Terra, si avrà dunque per i periodi di rivoluzione T_1 e T_2 :

$$\frac{(D/2)^3}{{T_1}^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \qquad \frac{((D+r)/2)^3}{{T_2}^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

da cui:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{D^3}{8GM}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{(D+r)^3}{8GM}}$$

I tempi di impatto dei due bolidi, pari a metà dei rispettivi periodi di rivoluzione, sono dunque:

$$t_{imp,1} = \pi\sqrt{\frac{D^3}{8GM}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{D^3}{GM}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(10^6\cdot 10^3)^3}{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.97\cdot 10^{24}}} = 1760170.74\ s = 20^d 08^h 56^m 10.74^s$$

$$t_{imp,2} = \pi\sqrt{\frac{(D+r)^3}{8GM}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(D+r)^3}{GM}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{((10^6+10^3)\cdot 10^3)^3}{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.97\cdot 10^{24}}} = 1762811.65\ s = \ 20^d 09^h 40^m 11.65^s$$

Il primo bolide, dunque, impatta dopo 20 giorni (solari), 8 ore, 56 minuti e 10.74 secondi; il secondo dopo 20 giorni, 9 ore, 40 minuti e 11.65 secondi

Il secondo impatto avviene dopo un intervallo di tempo Δt pari a:

$$\Delta t = 20^d 09^h 40^m 11.65^s - 20^d 08^h 56^m 10.74^s = 0^h 44^m 00.91^s = 2640.91\ s$$

Se gli impatti avvengono lungo l'equatore, la distanza "d" sarà pari alla distanza percorsa dall'equatore, in virtù della rotazione terrestre, nel tempo Δt. Essendo:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

la velocità lineare della rotazione terrestre all'equatore (con R = raggio terrestre e T = periodo siderale di rotazione terrestre), si ha:

$$d = v\cdot\Delta t = \frac{2\pi R}{T}\Delta t = 2\pi\frac{6378\ km}{23.934\ ore\ \cdot 3600\ \frac{s}{ora}}2640.91\ s = 1228.29\ km$$

Olimpiadi Italiane di Astronomia 2015

Finale Nazionale

Alcuni dati di interesse

Tabella 1 – Sole

Raggio medio	695475 km		*Età stimata*	$4.57 \cdot 10^{9}$ anni
Massa	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg		*Classe spettrale*	G2 V
Temperatura superficiale	5778 K		*Posizione nel diagramma HR*	Sequenza principale
Magnitudine apparente dalla Terra	- 26.8		*Distanza media dal centro galattico*	27000 anni-luce
Magnitudine assoluta	+ 4.83		*Periodo di rivoluzione intorno al centro galattico*	$2.5 \cdot 10^{8}$ anni

Tabella 2 – Sistema Solare

	Mercurio	*Venere*	*Terra*	*Luna*	*Marte*	*Giove*	*Saturno*	*Urano*	*Nettuno*
Raggio medio (km)	2440	6052	6378	1738	3397	71492	60268	25559	24766
Massa (kg)	$3.30 \cdot 10^{23}$	$4.87 \cdot 10^{24}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$7.35 \cdot 10^{22}$	$6.42 \cdot 10^{23}$	$1.90 \cdot 10^{27}$	$5.68 \cdot 10^{26}$	$8.68 \cdot 10^{25}$	$1.02 \cdot 10^{26}$
Semiasse maggiore dell'orbita (km)	$57.9 \cdot 10^{6}$	$108.2 \cdot 10^{6}$	$149.6 \cdot 10^{6}$	$384.4 \cdot 10^{3}$	$227.9 \cdot 10^{6}$	$778.3 \cdot 10^{6}$	$1.43 \cdot 10^{9}$	$2.87 \cdot 10^{9}$	$4.50 \cdot 10^{9}$
Periodo orbitale	87.97 ^{g}	224.70 ^{g}	1 ^{a}	27.32 ^{g}	1.88 ^{a}	11.86 ^{a}	29.45 ^{a}	84.07 ^{a}	164.88 ^{a}
Eccentricità dell'orbita	0.206	0.007	0.017	0.055	0.093	0.048	0.056	0.046	0.001
Tipo	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	roccioso	gassoso	gassoso	gassoso	gassoso

Tabella 3 – Area della superficie per figure geometriche notevoli

	Triangolo	*Rettangolo*	*Quadrato*	*Cerchio*	*Ellisse*	*Sfera*
Area	b h / 2	$\ell_1 \ell_2$	ℓ^{2}	πR^2	π a b	$4 \pi R^2$

Tabella 4 – Costanti fisiche

Nome	*Simbolo*	*Valore*	*Unità di misura*
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \cdot 10^{-8}$	W m^{-2} K^{-4}
Velocità della luce nel vuoto	c	299792	km s^{-1}
Costante di Gravitazione Universale	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$	m^3 kg^{-1} s^{-2}
Accelerazione di gravità al livello del mare	g	9.81	m s^{-2}

Tabella 5 – Formule per i triangoli rettangoli

Teorema di Pitagora	$c^2 = a^2 + b^2$
Funzioni trigonometriche	$a = c \operatorname{sen} \beta$ $a = c \cos \alpha$ $a = b \tan \beta$